QUINTANA ROO
GOBIERNO DEL ESTADO
2016 • 2022

MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE QUINTANA ROO

CÁLCULO DIFERENCIAL

Material Didáctico del Estudiante

V

SEMESTRE

Directorio

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

Mtra. Yolanda del Rosario Loría Marín
Directora Académica

Lic. Mario Velázquez George
Subdirector Académico

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz
Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico

Elaboración, revisión y aprobación:

Mtro. Jorge Antonio Canul Poot, **Docente del Plantel Cozumel**
Ing. Felipe de Jesús Tox Pereyra, **Docente del Plantel Chetumal Dos**
Lic. Carlos Adrián Garnier Vilchis, **Docente del Plantel Cancún Dos**
Mtra. Estela del Socorro Gamboa Várguez**, Docente del Plantel Chetumal Uno**
Mtra. Merly Yajaira Flores Chablé, **Docente del Plantel Tihosuco**
Ing. Víctor Antonio Resendiz Wong**, Docente del Plantel Bacalar**

Revisión y Actualización:
Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes, **Jefa de Materia del Área de Matemáticas**

Diseño de portada:
Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias
Col. Adolfo López Mateos
Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo

PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo, estamos comprometidos con el desarrollo educativo que recibirás durante el bachillerato; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia trajo consecuencias negativas, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá ejercitar los contenidos de tus diferentes programas de estudio. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas. Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos para generar resiliencia y fortalecer las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Cálculo Diferencial, cuyo propósito principal es desarrollar el pensamiento lógico matemático, que te permita entender e interpretar situaciones del contexto mediante la aplicación de la Derivada.

Esta asignatura se compone de 4 bloques, iniciaremos recordando algunos conocimientos previos del campo de las matemáticas, que adquiriste en tus semestres anteriores y que te servirán de puente hacia la comprensión de la aplicación de procedimientos para derivar y su aplicación en diversos problemas y fenómenos del entorno. Este bloque lo hemos denominado Bloque 0.

Posteriormente, en el Bloque 1 calcularás límites de funciones, así como Derivadas en el Bloque 2, lo que te permitirá en el Bloque 3 comprender la razón de cambio de diversos fenómenos del entorno. Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá comprender los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

También, considera dos herramientas básicas para el desarrollo de las actividades como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluirlas satisfactoriamente.

Finalmente, es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

¡Éxito!

BLOQUE 0. Aprendizajes previos

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Leyes de los exponentes

Lectura previa

Leyes de los exponentes

Un producto, en el que los factores son la misma cantidad se puede escribir de manera simplificada como:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \implies 2^5$$

Donde el 2 se conoce como la base y el 5 es el exponente. Por lo tanto, una potencia es una forma simplificada de escribir un producto de factores iguales.
En general, una potencia se puede representar algebraicamente como se muestra en la figura 1.

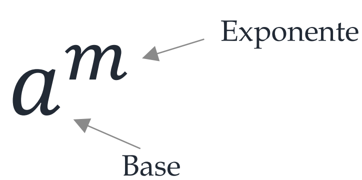


Figura 1. Elementos de una potencia

Para resolver operaciones matemáticas que involucran potencias, se utilizan un conjunto de reglas que se conocen como las leyes de los exponentes. Éstas se describen en la tabla 1. Analiza su definición, su estructura algebraica y los ejemplos de aplicación.

Tabla 1. Leyes de los exponentes

I. PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE.	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Ejemplos
Para multiplicar potencias de la misma base, se escribe la misma base y se suman los exponentes.	$(5^4)(5^3) = 5^{4+3} = 5^7$
	$\left(x^{1/2}\right)(x) = x^{\frac{1}{2}+1} = x^{3/2}$
	$(5x-3)^{-4}(5x-3)^2 = (5x-3)^{-4+2} = (5x-3)^2$

II. DIVISIÓN DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE.	
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Ejemplos
Para dividir potencias de la misma base, se escribe la misma base y se restan los exponentes.	$\frac{7^8}{7^3} = 7^{8-3} = 7^5$
	$\frac{(5x)^5}{(5x)^7} = (5x)^{5-7} = (5x)^{-2}$
	$\frac{(4x^2-3y)^{3/4}}{(4x^2-3y)^{1/2}} = (4x^2-3y)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = (4x^2-3y)^{1/4}$

III. POTENCIA DE UN PRODUCTO.	
$(a \cdot b)^m = a^m b^m$	Ejemplos
La potencia de un producto es igual al producto de los factores elevados a la misma potencia.	$(5 \cdot 8)^4 = 5^4 \cdot 8^4$
	$(3x)^{-5} = 3^{-5} \cdot x^{-5}$
	$[(2x^2-7)(4x-1)]^{\frac{1}{3}} = (2x^2-7)^{\frac{1}{3}}(4x-1)^{\frac{1}{3}}$

IV. POTENCIA DE UN COCIENTE (FRACCIÓN).	
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	Ejemplos
La potencia de un cociente o fracción es igual al numerador y al denominador elevados a la misma potencia.	$\left(\frac{5}{8}\right)^{-6} = \frac{5^{-6}}{8^{-6}}$
	$\left(\frac{5xy}{2x^3}\right)^3 = \frac{(5xy)^3}{(2x^3)^3}$
	$\left(\frac{3x+2}{4-x^3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}{(4-x^3)^{\frac{3}{2}}}$

V. POTENCIA DE UNA POTENCIA.

$(a^m)^n = a^{mn}$	Ejemplos
Para elevar una potencia a otra potencia, se toma la misma base y se multiplican los exponentes.	$(9^5)^3 = 9^{15}$
	$[(7x)^{-3}]^4 = (7x)^{-12}$
	$\left[(5x^3-4)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} = (5x^3-4)^{\frac{6}{6}} = 5x^3-4$

VI. POTENCIA CERO.

$a^0 = 1$	Ejemplos
Toda base elevada a potencia cero es igual a uno.	$6^0 = 1$
	$(3x^{-2})^0 = 1$
	$\left(\frac{3x+2}{4-x^3}\right)^0 = 1$

VII. POTENCIA NEGATIVA.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	Ejemplos
Una potencia negativa es igual al recíproco de la base, es decir, a una fracción cuyo numerador es uno y el denominador es la misma base con potencia positiva.	$5^{-1} = \frac{1}{5}$
	$(8t)^{-2} = \frac{1}{(8t)^2}$
	$(4x-6)^{-1/3} = \frac{1}{(4x-6)^{1/3}}$

VIII. POTENCIA FRACCIONARIA.

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$	Ejemplos
La base elevada un exponente fraccionario es igual a un radical, en el que la base es el radicando, el numerador del exponente es la potencia del radicando y el denominador es el índice del radical.	$5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$
	$y^{4/3} = \sqrt[3]{y^4}$
	$(7t^3-5)^{2/3} = \sqrt[3]{(7t^3-5)^2}$

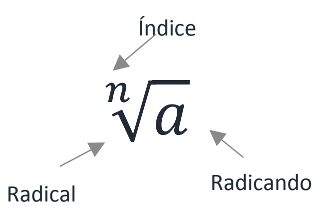


Figura 2. Elementos de los radicales

Las leyes 7 y 8 pueden aplicarse en el sentido de su definición o de manera inversa, como se muestra a continuación:

De potencia negativa a fracción	De fracción a potencia negativa
$y^{-3} \Longrightarrow \frac{1}{y^3}$	$\frac{1}{y^3} \Longrightarrow y^{-3}$
De potencia a radical	De radical a potencia
$x^{\frac{4}{3}} \Longrightarrow \sqrt[3]{x^4}$	$\sqrt[3]{x^4} \Longrightarrow x^{\frac{4}{3}}$

Al trabajar con los radicales hay que tener presente que si éste no indica el índice se sobreentiende que es una raíz cuadrada, cuyo índice es dos.

La combinación de las diferentes leyes son una herramienta muy útil para realizar operaciones algebraicas.

Observa y analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Realiza las operaciones indicadas y simplifica la expresión usando la ley de los exponentes $(4x^3y)(-2x^{-8}y^6)$

Solución:

Multiplicando los coeficientes y aplicando la ley I para ambas variables.

$$(4x^3y)(-2x^{-8}y^6) = -8x^{3+(-8)}y^{1+6}$$
$$= -8x^{-5}y^7$$

Aplicando la ley VII para la x

$$= -8 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot y^7$$

Realizando las operaciones indicadas, se tiene que:

$$(4x^3y)(-2x^{-8}y^6) = -\frac{8y^7}{x^5}$$

Ejemplo 2

Simplifica la expresión $\frac{3a^{-2}b^5}{2a^4b^{-2}}$

Solución:

Indicando la división y aplicando la ley II, para ambas variables:

$$\frac{3a^{-2}b^5}{2a^4b^{-2}} = \frac{3}{2}a^{-2-4}b^{5-(-2)}$$
$$= \frac{3}{2}a^{-6}b^{5+2} = \frac{3}{2}a^{-6}b^7$$

Aplicando la ley VII para ambas variables

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot b^7$$

Realizando las operaciones indicadas, se tiene que:

$$\frac{3a^{-2}b^5}{2a^4b^{-2}} = \frac{3b^7}{2a^6}$$

Ejemplo 3

Simplifica e indica con exponentes positivos la expresión $\left(\frac{x^3}{3y^{-1}}\right)^{-2}$

Solución:

Aplicando IV $\qquad \left(\frac{x^3}{3y^{-1}}\right)^{-2} = \frac{(x^3)^{-2}}{(3y^{-1})^{-2}}$

Aplicando V en el numerador; III y V en el denominador. $\qquad = \frac{x^{-6}}{3^{-2}y^2}$

Aplicando VII en el numerador y el denominador $\qquad = \frac{\frac{1}{x^6}}{\frac{y^2}{3^2}}$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones $\qquad = \frac{3^2}{x^6y^2}$

Simplificando $\qquad = \frac{9}{x^6y^2}$

Por lo tanto: $\left(\frac{x^3}{3y^{-1}}\right)^{-2} = \frac{9}{x^6y^2}$

Ejemplo 4

Usa la ley de los exponentes para simplificar $\frac{\sqrt[3]{(9x-3)^2}}{\sqrt{\frac{9x-3}{2x+5}}}$

Solución:

Aplicando VIII en el numerador y denominador[1] $\qquad \frac{\sqrt[3]{(9x-3)^2}}{\sqrt{\frac{9x-3}{2x+5}}} = \frac{(9x-3)^{2/3}}{\left(\frac{9x-3}{2x+5}\right)^{1/2}}$

Aplicando IV en el denominador. $\qquad = \frac{(9x-3)^{2/3}}{\frac{(9x-3)^{1/2}}{(2x+5)^{1/2}}}$

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.[2] $\qquad = \frac{(9x-3)^{2/3}(2x+5)^{1/2}}{(9x-3)^{1/2}}$

Aplicando II $\qquad = (9x-3)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}(2x+5)^{1/2}$

$\qquad = (9x-3)^{\frac{1}{6}}(2x+5)^{1/2}$

Aplicando VIII $\qquad = \sqrt[6]{9x-3}\sqrt{2x+5}$

Por lo tanto: $\frac{\sqrt{9x-3}}{\sqrt{\frac{9x-3}{2x+5}}} = \sqrt[6]{9x-3}\sqrt{2x+5}$

[1] Observa que la ley en mención se aplicó en sentido inverso.
[2] Coloquialmente denominada “La regla del sándwich”

Actividad 0.1

Aplicando las leyes de los exponentes

Instrucciones:

1. Resuelve en tu libreta los ejercicios que proporcionan.
2. Usa la ley de los exponentes de la tabla 1, para simplificar las expresiones que se te indican en los ejercicios propuestos.
3. Menciona en cada paso la o las leyes que se aplican, usa todas las leyes posibles.

A. $\frac{x^5y^{-2}}{x^3y}$

B. $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x})$

C. $\left(\frac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\frac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$

D. $\sqrt[3]{\frac{5x-4}{x^2-2}} \cdot \frac{x^2-2}{(5x-4)^{-2}}$

E. $\left(\frac{6-3x^4}{x^5-8}\right)^{-3/4}$

Evaluación

- Para evaluar esta actividad se utilizará el Instrumento 1 de evaluación.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
- **Conocimiento (s):** Productos notables

Lectura previa

Productos notables

La multiplicación de polinomios es una de las operaciones que más se utilizan en los procedimientos algebraicos. Algunos casos de estos productos son repetitivos, lo que es posible representarlos en una fórmula para agilizar la operación. Este tipo de productos se conocen como productos notables. La siguiente tabla muestra los productos notables de uso común y las reglas que permiten desarrollar dicho producto.

Tabla 2. Productos notables

Nombre del producto	Regla de desarrollo	Forma algebraica	Nombre del producto
1. Binomio al cuadrado	Cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término	Representación $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ Desarrollo $(a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$	Trinomio cuadrado perfecto (TCP)
2. Binomio al cubo.	Cubo del primer término, más triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más cubo del segundo término.	Representación $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b)$ Desarrollo $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	Cubo perfecto
3. Binomios conjugados.	El cuadrado del término común menos el cuadrado del término simétrico.	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Diferencia de cuadrados
4. Producto de binomios con término común.	Cuadrado del término común, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, más el producto de los términos no comunes.	$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$	Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
5. Trinomio al cuadrado.	La suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos.	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	

La idea de la información de la tabla 2, es el uso del enunciado del producto notable correspondiente o aplicar la sustitución en la fórmula respectiva. Analiza los siguientes ejemplos resueltos:

Ejemplo 5

Desarrolla $(x+5)^2$

Solución:

Datos

$a = x$

$b = 5$

Sustituyendo en la fórmula 1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(x+5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

Ejemplo 6

Desarrollar $(3x^2 - 7)^2$

Solución:

Datos

$a = 3x^2$

$b = -7$

Sustituyendo en la fórmula 1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(3x^2 - 7)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)(-7) + (-7)^2 = 9x^4 - 42x^2 + 49$

Ejemplo 7

Desarrollar $(4m - 7n - 5)^2$

Solución:

Datos

$a = 4m$

$b = -7n$

$c = -5$

Sustituyendo en la fórmula 5: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$(4m - 7n - 5)^2 = (4m)^2 + (-7n)^2 + (-5)^2 + 2(4m)(-7n) + 2(4m)(-5) + 2(-7n)(-5)$$
$$= 16m^2 + 49n^2 + 25 - 56mn - 40m + 70n$$

Ejemplo 8

Obtener el resultado de $(2x + \sqrt{y})(2x - \sqrt{y})$

Solución:

Datos

$a = 2x$

$b = \sqrt{y}$

Sustituyendo en la fórmula 3: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(2x + \sqrt{y})(2x - \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$

Ejemplo 9

Obtener el resultado de $(n^4+10)(n^4-8)$

Solución:

Datos	Sustituyendo en la fórmula 4: $(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$
$a=n^4$	$(n^4+10)(n^4-8)=(n^4)^2+(10-8)n^4+(10)(-8)$
$b=10$	$=n^8+2n^4-80$
$c=-8$	

Actividad 0.2

Desarrollando productos notables

Instrucciones:

1. Copia la tabla en tu libreta.
2. Con base en la información de la tabla 2, identifica el producto notable en cada caso.
3. Resuelve aplicando la regla o fórmula correspondiente.

Producto	Nombre	Desarrollo o resultado
1. $(\mathbf{5x-4})(\mathbf{2+5x})$		
2. $(\mathbf{2x^3-4})^{\mathbf{3}}$		
3. $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{y+3}\right)^{\mathbf{2}}$		
4. $(\mathbf{x+2y+3z})^{\mathbf{2}}$		
5. $\left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{3m^4}}{\mathbf{2}}\right)\left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{3m^4}}{\mathbf{2}}\right)$		
6. $(\mathbf{7-x})(\mathbf{7+3x})$		

7. $(\mathbf{2z+3})(\mathbf{2z-3})$		
8. $(\mathbf{-2x^3+7})(\mathbf{-2x^3+7})$		
9. $(\mathbf{2x+y-1})^{\mathbf{2}}$		
10. $(\mathbf{5-t^2})^{\mathbf{3}}$		

Evaluación

- Esta actividad se evalúa con el Instrumento 2 de Evaluación

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributo(s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo/ 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento(s):** Factorización

Lectura previa

Factorización

Factorizar un producto algebraico significa encontrar los factores que se multiplicaron para obtener dicho producto. El proceso de encontrar los factores se conoce como factorización.

$$\underbrace{9x^4 - 42x^2 + 49}_{\textbf{Producto}} = \underbrace{\overbrace{(3x^2 - 7)(3x^2 - 7)}}_{\textbf{Factores}}$$

Figura 3. Concepto de la factorización

Los casos más comunes de factorización son:

- Por término común.
- Factorización por agrupación.
- Factorización de trinomios.
- Productos relacionados derivados de los productos

Revisemos en que consiste cada uno.

I. Factorización por término común

Este método se aplica cuando en la expresión algebraica se observa que, en todos sus términos, existe una o varias literales comunes y/o sus coeficientes son múltiplos de algún valor constante.

$$2x^5y^2 - 8xy^5 \Longrightarrow \begin{cases} x, y \;\; literales\ comunes \\ 2 \;\; es\ un\ factor\ de\ 2\ y\ 8 \end{cases}$$

Tabla 3. Consideraciones para factorizar por factor común.

Procedimiento
1. **Obtener el M.C.D de los coeficientes.**
2. **Tomar la literal o literales que se repite en todos los términos del polinomio.**
3. **Indica el factor común como el producto de los dos pasos anteriores.**
4. **Calcula el segundo factor, dividiendo cada término del polinomio entre el factor común.**
5. **Indica la factorización del polinomio como el producto del factor común por el segundo factor.**

Observa y analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 10 *Factorizar* $\boldsymbol{2x^3+4x^2+6x}$	**Ejemplo 11** *Factorizar* $\boldsymbol{16a^6b^7c-12a^5b^2c^3+20a^3b^{10}}$
1. M.C.D $(\boldsymbol{2},\boldsymbol{4},\boldsymbol{6}) = \boldsymbol{2}$	1. M.C.D $(\boldsymbol{16},\boldsymbol{12},\boldsymbol{20}) = 4$
2. Literal que se repite: $\boldsymbol{x}$	2. Literal que se repite: a^3b^2
3. Factor común: $\boldsymbol{2x}$	3. Factor común: $4a^3b^2$
4. Calculando el segundo factor: $\frac{2x^3}{2x}=x^2;\ \frac{4x^2}{2x}=2x;\ \frac{6x}{2x}=3$	4. Calculando el segundo factor: $\frac{16a^6b^7c}{4a^3b^2}=4a^3b^5c;\frac{-12a^5b^2c^3}{4a^3b^2}=-3a^2c^3;\ \frac{20a^3b^{10}}{4a^3b^2}=5b^8$
5. $\boldsymbol{2x^3+4x^2+6x=2x(x^2+2x+3)}$	5. $16a^6b^7c-12a^5b^2c^3+20a^3b^{10}=4a^3b^2(4a^3b^5c-3a^2c^3+5b^8)$

Ejemplo 12. *Factorizar* $\boldsymbol{9x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}-15x^3(x+3)^2}$	
1. M.C.D $(\boldsymbol{9},\boldsymbol{15})=\boldsymbol{3}$	4. Calculando el segundo factor:
2. Literal que se repite: $\boldsymbol{x^2};\ \boldsymbol{(x+3)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{9x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}}{3x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}}=3;\ \frac{-15x^3(x+3)^2}{3x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}}=-5x(x+3)^{\frac{3}{2}}$
3. Factor común: $\boldsymbol{3x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}}$	
	5. $9x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}-15x^3(x+3)^2=3x^2(x+3)^{\frac{1}{2}}\left[3-5x(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]$

En la práctica, se recomienda que los pasos 1,2 y 3 se indique directamente en el paso 5 como el factor común; el paso 4 puede hacerse de manera mental e indicar el resultado como el segundo factor en el mismo paso 5.

II. Factorización por agrupamiento

Este método es aplicable a algunos polinomios con al menos cuatro términos. Consiste en agrupar dos o más términos del polinomio y aplicar la factorización por término común reiteradamente, como se indica en el siguiente procedimiento sugerido.

Tabla 4. Procedimiento sugerido para la factorización por agrupamiento.

Procedimiento
1. **Agrupar dos o más términos del polinomio, procurando que éstos tengan elementos comunes.**
2. **Aplicar la factorización por término común a cada agrupamiento.**
3. **Indica la factorización como el producto de la suma algebraica de los términos comunes por la suma algebraica de los términos no comunes.**

Observa y analiza la aplicación del procedimiento en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 13

Factorizar $x^3 + x^2 + 4x + 4$

Solución:

Agrupando términos[3]:	$(x^3 + x^2) + (4x + 4)$
Factorizando x^2 en la primera agrupación y 4 en la segunda:	$x^2(x + 1) + 4(x + 1)$
Factorizando $(x + 1)$ para indicar la factorización del polinomio.	$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x + 1)(x^2 + 4)$

Ejemplo 14

Factoriza $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Solución:

Agrupando términos:	$(x^3 - 2x^2) + (-3x + 6)$
Factorizando x^2 en la primera agrupación y 3 en la segunda[4]:	$x^2(x - 2) + 3(-x + 2)$ $x^2(x - 2) - 3(x - 2)$
Factorizando $(x - 2)$ para indicar la factorización del polinomio.	$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x - 2)(x^2 - 3)$

[3] Observa que un agrupamiento alternativo en el polinomio es $(x^3 + 4x) + (x^2 + 4)$, de igual forma el resultado es el mismo que el obtenido.
[4] Observa que en la segunda agrupación el binomio indicado en el paréntesis es diferente en su signo, por lo que se tuvo que factorizar dicho signo para que ambos sean iguales.

Ejemplo 15

Factoriza $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

Solución:

Agrupando términos:	$(3x - 9x^3) + (1 - 3x^2)$
Factorizando $3x$ en la primera agrupación; la segunda no presenta términos comunes:	$3x(1 - 3x^2) + (1 - 3x^2)$
Factorizando $(1 - 3x^2)$ para indicar la factorización del polinomio.	$-9x^3 - 3x^2 + 3\text{x} + 1 = (1 - 3x^2)(3x + 1)$

III. Factorización de trinomios

Factorizar un trinomio implica tener presente la forma de éste y su relación con alguno de los productos notables. En general, se dice que un trinomio puede ser cuadrado perfecto, de la forma $x^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx + c$. Reconocer cada una de estas formas permite establecer una estrategia para obtener su factorización, como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Consideraciones para la factorización de trinomios

Factorización de trinomios		
[5]Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)	Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
Resulta de desarrollar un binomio al cuadrado: Para factorizar: • Ordena el trinomio en orden descendente, con respecto a la variable. • Obtener la raíz cuadrada del primer término y tercer término del trinomio. • Comprueba que el doble producto de las raíces sea el segundo término del trinomio.	Puede asociarse con el producto de binomio con término común. Para factorizar considera lo siguiente: • Ordena el trinomio en orden descendente, con respecto a la variable. • Obtener la raíz cuadrada del primer término, éste es término común. • Indica la factorización como: $x^2 + bx + c = (x \quad)(x \quad)$	Su factorización se realiza desde el método de ensayo y error. Para ello considera lo siguiente: • Ordena el trinomio en orden descendente, con respecto a la variable. • Construye una tabla con los factores del primer término en una columna y en la segunda columna los factores del tercer término:

[5] Recuerda que para comprobar si un trinomio es cuadrado perfecto, el primero y tercer término deben tener raíces cuadradas exactas, y el doble producto de dichas raíces debe ser el segundo término del trinomio.

<table>
<tr>
<td>Indica la factorización como un binomio al cuadrado con las raíces obtenidas, colocando el signo del segundo término del trinomio, entre los términos de binomio.</td>
<td>Encuentra dos números que multiplicados sea el tercer término del trinomio y, la suma algebraica sea el coeficiente del segundo término del trinomio (puedes elaborar una tabla de posibilidades).
Indica la factorización colocando los valores encontrados, uno en cada factor.</td>
<td><table><tr><td>Factores del primer término</td><td>Factores del segundo término</td></tr><tr><td>a_1x</td><td>c_1</td></tr><tr><td>a_2x</td><td>c_2</td></tr></table>
Realiza el producto cruzado y comprueba que la suma algebraica coincida con el segundo término del trinomio.
Indica la factorización del trinomio con los factores del primer y tercer término de la tabla.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">En la factorización de trinomios considera lo siguiente:
El signo del segundo término del trinomio es el signo del mayor de los dos números de sus factores.
Si el signo del tercer término del trinomio es positivo $(+)$, entonces los números son de signos iguales.
Si el signo del tercer término del trinomio es negativo $(-)$, entonces los números son de signos diferentes.</td>
</tr>
</table>

Observa y analiza los siguientes ejemplos resueltos.

Ejemplo 16

Factoriza $x^2 - 10x + 24$

Solución:

- Se trata de un trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$
- La raíz del primer término: $\sqrt{x^2} = x$
- La factorización es de la forma: $x^2 - 10x + 24 = (x \quad)(x \quad)$
- Se necesitan dos enteros cuyo producto sea 24 y su suma sea -10.
  Elaboramos la siguiente tabla de posibilidades:

Posibilidades		
Factores	Producto de factores	Suma de los factores
$(-\mathbf{1})(-\mathbf{24})$	24	-25
$(-\mathbf{2})(-\mathbf{12})$	24	-14
$(-\mathbf{3})(-\mathbf{8})$	24	-11
$(-\mathbf{4})(-\mathbf{6})$	24	-10

De la tabla observamos que el par -4 y -6 cumple la condición.

Por lo tanto:

$$x^2 - 10x + 24 = (x - 4)(x - 6)$$

Ejemplo 17

Factoriza $9x^8 - 24x^4 + 16$

Solución:

- Se trata de un TCP
- Obteniendo las raíces del primer y tercer término: $\sqrt{9x^8} = 3x^4$; $\sqrt{16} = 4$
- Comprobando el segundo término del trinomio: $2(3x^4)(4) = 24x^4$
- Indicando la factorización con el signo del segundo término del trinomio:

$$9x^8 - 24x^4 + 16 = (3x^4 - 4)^2$$

Ejemplo 18

Factoriza $6x^2 - 7x - 3$

Factores del primer término	Factores del tercer término	Producto cruzado
$2x$	-3	$2x$
$3x$	$+1$	$-9x$
	Suma algebraica	$7x$

- Por el coeficiente del primer término se trata de un trinomio de la forma: $ax^2 + bx + c$.
- Elaboramos la tabla de la izquierda con las propuestas de factores, considerando los criterios de los signos y realizamos el producto cruzado.
- De la tabla se observa que la suma algebraica coincide con el segundo término del trinomio.
- Indicando la factorización:

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

IV. Fórmulas especiales de factorización

Algunos polinomios pueden asociarse a ciertos productos notables o a algunas fórmulas especiales que facilitar el proceso de factorización.
Algunas de estas fórmulas se presentan en la tabla 6.

Tabla 6. Fórmulas especiales para factorización relacionados con algunos productos notables

Nombre del producto	**Fórmula asociada al producto notable**
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Cubo perfecto	$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$

Observa y analiza en los siguientes ejemplos el uso de la información de la tabla 6.

Ejemplo 19. *Factoriza* $4x^2 - 25$

Solución:

- Corresponde a una diferencia de cuadrados.
- Fórmula: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- Datos:

$a^2 = 4x^2 \qquad b^2 = 25$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{4x^2} \qquad \sqrt{b^2} = \sqrt{25}$

$a = 2x \qquad b = 5$

- Sustituyendo en la fórmula:

$$4x^2 - 25 = (2x+5)(2x-5)$$

Ejemplo 21. *Factoriza* $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}$

Solución

- Fórmula: $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$
- Datos:

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{x} \qquad \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2}$

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \qquad \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$

$a = x \qquad b = 2$

- Sustituyendo en la fórmula:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2} = \frac{x-2}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}}$$

- Aplicando las leyes de los exponentes para potencias fraccionarias realizando las operaciones indicadas:

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2} = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}$$

Ejemplo 20. *Factoriza* $27y^3 + 64$

Solución:

- Corresponde a una suma de cubos.
- Fórmula: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- Datos:

$a^3 = 27y^3 \qquad b^3 = 64$

$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{27y^3} \qquad \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{64}$

$a = 3y \qquad b = 4$

- Sustituyendo en la fórmula:

$$27y^3 + 64 = (3y+4)[(3y)^2 - (3y)(4) + 4^2]$$

- Realizando las operaciones indicadas:

$$27y^3 + 64 = (3y+4)(9y^2 - 12y + 16)$$

Actividad 0.3

Reconociendo y aplicando los procedimientos de factorización.

Instrucciones:

1. Revisa la información y los ejemplos resueltos de la lectura.
2. Identifica y usa el procedimiento correspondiente para factorizar los ejercicios propuestos.
3. Resuelve, en tu libreta de manera ordenada y organizada.

Ejercicios propuestos

1) $11ax - 121a^2x + 33a^3$

2) $49x^2 - \frac{16}{25}$

3) $121 + 198t^6 + 81t^{12}$

4) $x^5 + x^4 + x + 1$

5) $27x^3 + 8$

6) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) $x^2 + 12x + 36$

8) $3x^2 - 5x - 2$

9) $100 - 16x^2$

10) $8x^3 - 1$

11) $z^{10} + z^5 - 20$

12) $6x^2 + 13x + 5$

13) $6x(3x - 1) + 2x^2(3x - 1)^2$

14) $x^8 + 18x^4 + 81$

15) $\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{7}$

16) $12(2x - 1)^{1/2} - 4(2x - 1)$

17) $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

18) $x^2 - 5x + 4$

Evaluación

- Esta actividad se evalúa con el Instrumento 3 de evaluación.

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo/ 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Racionalización.

Lectura previa

Racionalización

La racionalización es un procedimiento algebraico que consiste en eliminar un radical (comúnmente del denominador) de una fracción, el cual consiste en multiplicar tanto el numerador como el denominador por un radical, de tal manera que el radicando del denominador se convierta en uno o en entero.
Los casos más comunes de racionalización en las fracciones algebraicas son:

I. El denominador contiene un radical de cualquier índice

Si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces se debe multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, es decir:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Observa el siguiente ejemplo:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^{3-1}}\right) = \sqrt[3]{a^{1+3-1}} = \sqrt[3]{a^3} = a \qquad \text{Si } n = 3 \text{ y } m = 1$$

Una idea práctica es visualizar los radicales como potencias fraccionarias para identificar el factor radical con el cual debe multiplicarse. El ejemplo anterior podría representarse como se muestra en la siguiente tabla.

Radical	Potencia	Factor	Producto	Racionalización
$\sqrt[3]{a}$	$a^{1/3}$	$a^{2/3}$	$a^{1/3} \cdot a^{2/3} = a^{3/3}$	$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
$\sqrt{x^5}$	$x^{5/2}$	$x^{1/2}$	$x^{5/2} \cdot x^{1/2} = x^{6/2} = x^3$	$\sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^6} = x^3$

Algunas leyes que serán útiles para llevar a cabo la racionalización se muestran continuación:

Tabla 7. Leyes relacionadas con la racionalización

i. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	ii. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	iii. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Observa y analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 22. *Racionaliza* $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Solución:

Como el radical es raíz cuadrada se multiplica por $\sqrt{3}$ en el numerador y denominador:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 23. *Racionalizar* $\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$

Solución:

Exponente fraccionario del radicando: $x^{2/3}$

Para potencia uno: $x^{1/3}$ $\Rightarrow \left(x^{2/3}\right)\left(x^{1/3}\right)=x$

Forma del radicando: $\sqrt[3]{x}$

Racionalizando:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{5\sqrt[3]{x}}{x}$$

Ejemplo 24

Racionalizar $\frac{\sqrt{t-1}}{t^2-2t+1}$

Solución:

Como se trata de una raíz cuadrada, el factor es $\sqrt{t-1}$

Indicando el producto del factor en el numerador como en el denominador: $\frac{\sqrt{t-1}}{t^2-2t+1}\cdot\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1}}=$

Realizando el producto y factorizando el trinomio[6] $=\frac{\left(\sqrt{t-1}\right)^2}{(t^2-2t+1)\sqrt{t-1}}=\frac{t-1}{(t-1)^2\sqrt{t-1}}$

Aplicando la ley de los exponentes para la división y la ley de las potencias racionales fraccionarias[7]. $=\frac{1}{(t-1)(t-1)^{1/2}}$

Realizando el producto de potencias de la misma base[8]. $=\frac{1}{(t-1)^{3/2}}$

Expresando en radical:[9] $\frac{1}{\sqrt{(t-1)^3}}$

Por lo tanto: $\frac{\sqrt{t-1}}{t^2-2t+1}=\frac{1}{\sqrt{(t-1)^3}}$

---

[6] Es un trinomio cuadrado perfecto, ver Tabla 4 para el procedimiento o tabla 5 para la fórmula.

[7] Leyes II y VII de la tabla 1.

[8] Ley III de la tabla 1.

[9] Ley VIII (en sentido inverso) de la tabla 1.

II. Racionalización mediante un conjugado.

Si el denominador de una fracción algebraica es un binomio que contiene un radical, se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado de dicho binomio.
Recuerda que el conjugado de un binomio, es otro binomio que contiene los mismos dos términos, pero con el signo del segundo término cambiado y su producto es una diferencia de cuadrados como se muestra en la figura 4.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Figura 4. Estructura de un binomio conjugado

El caso más simple y común de este caso de racionalización involucra a las raíces cuadradas como se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 25

Racionalizar la siguiente expresión $\frac{x-1}{\sqrt{x}-5}$

Solución:

Determinando el conjugado del denominador: $\sqrt{x}+5$

Indicando el producto, tanto el numerador y el denominador por el conjugado: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-5}\cdot\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$

Realizando las operaciones indicadas[10]: $\frac{(x-1)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x})^2-(5)^2}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$

Por lo tanto: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-5}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$

Ejemplo 26

Racionalizar la siguiente expresión $\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}$

Solución:

Determinando el conjugado del denominador: $\sqrt{\mathrm{w}+3}+\sqrt{3}$

Indicado el producto, tanto el numerador y el denominador por el conjugado: $\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{w+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{w+3}+\sqrt{3}}$

Realizando las operaciones indicadas $\frac{\sqrt{w}(\sqrt{w+3}+\sqrt{3})}{(\sqrt{w+3})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{w}(\sqrt{w+3}+\sqrt{3})}{w+3-3}$

---

[10] Observa que, en este paso, se indica el producto en el numerador, pero en el denominador se realiza el producto de los binomios conjugados, como indica la figura 4.

Expresando el radical como potencia fraccionaria y dividiendo: $= \frac{w^{1/2}(\sqrt{w+3}+\sqrt{3})}{w} = \frac{\sqrt{(w+3)}+\sqrt{3}}{w^{1/2}}$

Por lo tanto[11]: $\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+3}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(w+3)}+\sqrt{3}}{\sqrt{w}}$

Ejemplo 27

Racionalizar la siguiente expresión $\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

Solución:
El binomio conjugado es: $3+\sqrt{x+7}$

Indicando el producto, tanto el numerador y el denominador por el conjugado: $\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} \cdot \frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}$

Realizando las operaciones indicadas $\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2} = \frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)}$

Factorizando la diferencia de cuadrados y realizando las operaciones en el denominador $\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-x-7} = \frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{-x+2}$

Factorizando el signo del denominador y Aplicando la ley de división potencias $\frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{-(x-2)} = \frac{(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{-1}$

Por lo tanto: $\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} = -(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$

Ejemplo 28

Racionalizar la siguiente expresión $\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}$

Solución:
Se observa que tanto el numerador como el denominador contienen radicales, por lo tanto, se establecen los conjugados para cada uno:

$\sqrt{x+3}+2$ conjugado del numerador
$1+\sqrt{3x-2}$ conjugado del denominador

Indicando el producto, por cada conjugado, tanto en el numerador y el denominador: $\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \cdot \frac{1+\sqrt{3x-2}}{1+\sqrt{3x-2}}$

Realizando las operaciones indicadas $\frac{\left[\left(\sqrt{x+3}\right)^2-(2)^2\right]\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{\left[(1)^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{(x+3-4)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{[1-(3x-2)]\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

---
[11] Se expresa el denominador con radical

$$\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(1-3x+2)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(-3x+3)(\sqrt{x+3}+2)}$$

Factorizando en el denominador[12] y dividiendo: $$\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{-3(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1+\sqrt{3x-2}}{-3(\sqrt{x+3}+2)}$$

Por lo tanto: $$\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{3x-2}}=-\frac{1+\sqrt{3x-2}}{3(\sqrt{x+3}+2)}$$

Actividad 0.4

Racionalizando

Instrucciones:

1. Resuelve en tu libreta los siguientes casos de racionalización.

A. $\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}$

B. $\frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}$

C. $\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

D. $\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sqrt{x+5}-3}$

E. $\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

Evaluación

- Esta actividad se evalúa con el Instrumento 4 de evaluación.

[12] Factorización por término común

Actividad 5

- **Aprendizaje Esperado:** Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- **Atributo (s):** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo/ 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Simplificación de expresiones racionales.

Lectura previa

Simplificación de expresiones algebraicas

$$\frac{3x-6}{x}$$

$$\frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+1}$$

Figura 5. Ejemplos de expresiones racionales

Se conoce como expresión racional[13] a una expresión algebraica en forma de fracción, cuyo numerador y denominador son polinomios, condicionado a que éste último sea diferente de cero.

Se dice que una expresión racional está simplificada o reducida a su mínima expresión cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes, por ejemplo:

Expresión racional	Forma simplificada o reducida[14]
$\frac{4x-x^2}{2x}$	$\frac{4-x}{2}$

Para simplificar expresiones racionales:

1. Factorizar[15] el numerador y el denominador tanto como sea posible.
2. Expresar el numerador y el denominador como producto de sus factores.
3. Dividir el numerador y el denominador entre los factores comunes[16].

Con base a lo anterior analiza los siguientes ejemplos:

[13] Definición formal: "Una expresión racional es una expresión en la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$

[14] La forma reducida es equivalente a la expresión racional original, es decir, no cambia su valor.

[15] Revisar los distintos métodos de factorización estudiados en la actividad 3 de este documento.

[16] En la práctica este proceso lo reconocemos como "eliminar los factores comunes".

Ejemplo 29

Simplificar $\frac{5x^3+10x^2-25x}{10x^2}$

Solución:

Factorizando el numerador[17] $5x^3 + 10x^2 - 25x = 5x(x^2 + 2x - 5)$

Factorizando el denominador $10x^2 = 5x(2x)$

Expresando el numerador y el denominador con el producto de sus factores: $\frac{5x(x^2+2x-5)}{5x(2x)}$

Eliminando los factores comunes: $\frac{x^2+2x-5}{2x}$

Por lo tanto, la forma reducida es: $\frac{5x^3+10x^2-25x}{10x^2} = \frac{x^2+2x-5}{2x}$

Ejemplo 30

Reducir $\frac{x^2+2x-3}{x+3}$

Factorizando el numerador[18] $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

Factorizando el denominador $x + 3$ está en su mínima expresión

Expresando el numerador y el denominador con el producto de sus factores: $\frac{(x+3)(x-1)}{x+3}$

Eliminando los factores comunes: $x - 1$

Por lo tanto, la forma reducida es: $\frac{x^2+2x-3}{x+3} = x - 1$

Ejemplo 31

Encuentra una fracción equivalente a $\frac{3x^2-10x-8}{x^2+3x-28}$

Factorizando el numerador[19] $3x^2 - 10x - 8 = (3x + 2)(x - 4)$

Factorizando el denominador $x^2 + 3x - 28 = (x + 7)(x - 4)$

[17] Aplicación del método de factorización por término común.
[18] Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, de la tabla 4 de este documento. Ver ejemplo 11.
[19] Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, de la tabla 4 de este documento. Ver ejemplo 13

Expresando el numerador y el denominador con el producto de sus factores: $\frac{(3x+2)(x-4)}{(x+7)(x-4)}$

Eliminando los factores comunes: $\frac{3x+2}{x+7}$

Por lo tanto, la fracción equivalente o reducida es: $\frac{3x^2-10x-8}{x^2+3x-28} = \frac{3x+2}{x+7}$

Ejemplo 32

Simplifica $\frac{4t^2-23t-6}{6-t}$

<u>Solución:</u>

Factorizando el numerador[20] $4t^2 - 23t - 6 = (4t+1)(t-6)$

Factorizando el denominador $6 - \mathrm{t}$ está en su mínima expresión.

Expresando el numerador y el denominador con el producto de sus factores: $\frac{(4t+1)(t-6)}{6-t}$

Factorizando el signo del denominador[21] $\frac{(4t+1)(t-6)}{-(t-6)}$

Eliminando los factores comunes: $\frac{(4t+1)(t-6)}{-(t-6)} = -(4t+1)$

Por lo tanto, la forma reducida es: $\frac{4t^2-23t-6}{6-t} = -(4t+1)$

Ejemplo 33

Reducir $\frac{27x^3-8}{9x^2-4}$

<u>Solución:</u>

Factorizando el numerador[22] $27x^3 - 8 = (3x-2)(9x^2+6x+4)$

Factorizando el denominador[23] $9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$

---

[20] Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, de la tabla 4 de este documento. Ver ejemplo 13.
[21] Como $t - 6$ y $6 - t$, difieren solamente en el signo, fue necesario adecuar el denominador éstos resulten iguales.
[22] Factorización de una diferencia de cubos. Ver Tabla 5 ejemplo 15.
[23] Factorización de una diferencia de cuadrados. Ver tabla 5 y ejemplo 14.

Expresando el numerador y el denominador con el producto de sus factores: $\frac{(3x-2)(9x^2+6x+4)}{(3x-2)(3x+2)}$

Eliminando los factores comunes: $\frac{9x^2+6x+4}{3x+2}$

Por lo tanto, la forma reducida es: $\frac{27x^3-8}{9x^2-4} = \frac{9x^2+6x+4}{3x+2}$

Actividad 0.5

Instrucciones:

1. Encuentra una fracción equivalente a las siguientes expresiones racionales.

Ejercicios

1. $\frac{3x^2+6x}{3x^2+9}$
2. $\frac{w^2+5w+6}{w^3+8}$
3. $\frac{9x^2-1}{6x^2+5x+1}$
4. $\frac{2x^2-13x+15}{x^2-x-20}$
5. $\frac{64x^3-1}{4x^3-x^2}$
6. $\frac{4h^2+4h-3}{2h-1}$
7. $\frac{r^2-r-2}{r+1}$
8. $\frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$
9. $\frac{8a-6}{3-4a}$
10. $\frac{4y^5+5y^3}{y^4-y^2}$

Evaluación

- Esta actividad se evalúa con el Instrumento 5 de evaluación.

BLOQUE I. Límites

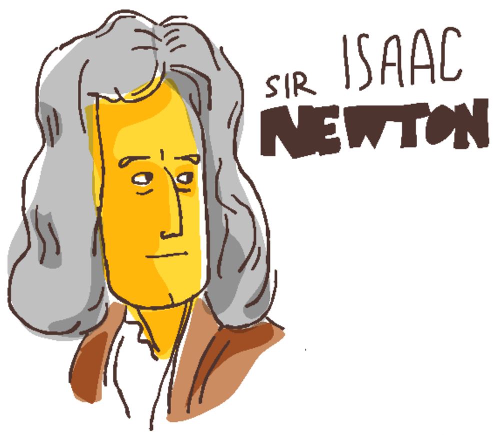
Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Explica la importancia del cálculo, por medio del conocimiento de sus antecedentes y aplicaciones reflexionando sobre su relevancia en procesos actuales de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- **Conocimiento (s):** Antecedentes y aplicaciones del cálculo

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

"Un poco de historia y el nacimiento del Cálculo"



El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. El Cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajó con los métodos "infinitesimales" pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el Cálculo que utilizamos en nuestros días.

Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Newton y Leibniz son considerados los descubridores del cálculo, pero representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos, *Barrow y Fermat*, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. Estos desarrollos estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como *Torricelli, Cavalieri, y Galileo*; o *Kepler, Valerio, y Stevin*. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de *Oresme, Arquímedes y Eudoxo*. Finalmente, el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por *Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras*. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la Geometría Analítica desarrollada independientemente por *Descartes y Fermat*.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII. Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad. La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma Protestante. El Cálculo Diferencial e Integral están en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad de la que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al Cálculo infinitesimal y por eso se puede considerar como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

El siglo XVII y la disputa por la creación del cálculo.

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

En parte estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán *Gottfried Wilhelm Leibniz* y el físico-matemático inglés *Issac Newton*: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de *Newton* están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que *Leibniz* conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se denota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que *Newton* llamó fluxión, para *Leibniz* fue un cociente de diferenciales (dy/dx). No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de *Newton* se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de *Leibniz* se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada. Dos siglos pasaron hasta que las desprolijidades en los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaron y hoy, aquel cálculo potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento. Al principio la disputa se realizó en el marco de la cortesía, pero al cabo de tres décadas comenzó a ser ofensiva hasta que en el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los nuevos logros fueron sometidos a severas críticas, la justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

El siglo XVIII

Durante buena parte del siglo los discípulos de *Newton* y *Leibniz* se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos *Bernoulli* inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés *Monge* la geometría descriptiva. *LaGrange,* también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo *Laplace* escribió Teoría Analítica de las Probabilidades (1812) y el clásico Mecánica Celeste (1799-1825), que le valió el sobrenombre de "el Newton francés".

Sin embargo, el gran matemático del siglo fue el suizo *Euler*, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. *Euler* escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. El éxito de *Euler* y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de *Newton* se basó en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de *Lagrange* era completamente algebraico y basado en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

A los matemáticos de fines del siglo el horizonte matemático les parecía obstruido. Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que no se les conocía o veía un alcance claro. Los sabios sentían la necesidad de estudiar conceptos nuevos y hallar nuevos procedimientos.

El siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. *Euler, LaGrange* y el matemático francés *Fourier* aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán *Dirichlet* quien propuso su definición en los términos actuales. En 1821, un matemático francés, *Cauchy*, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de *Cauchy* estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán *Dedekind* quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes *Cantor* y *Weierstrass* también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. *Gauss*, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de *Cauchy*, *Weierstrass* y el matemático alemán *Riemann*. Otro importante avance fue el estudio de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, hecho por *Fourier*. *Cantor* estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. La teoría de *Cantor* fue considerada demasiado abstracta y criticada. Encontramos aquí un espíritu crítico en la elaboración de estas nociones tan ricas. Esto constituye un punto de vista muy diferente del que animaba a los matemáticos del siglo anterior. Ya no se trata de construir expresiones ni forjar nuevos métodos de cálculo, sino de analizar conceptos considerados hasta entonces intuitivos.

Gauss desarrolló la geometría no euclidiana, pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Los fundamentos de la matemática fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés *Boole* en su libro Investigación sobre las leyes del pensamiento (1854).

Siglo XX y nuestros días

Es importante el aporte realizado por *Lebesgue* referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán *David Hilbert*, quien contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de la matemática retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién comenzaba. Estos problemas fueron el estímulo de una gran parte de los trabajos matemáticos del siglo.

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros siguen sin solución. Al mismo tiempo aparecen nuevos y estimulantes problemas y aún la matemática más abstracta encuentra aplicación.

Este es un resumen de algunos de los momentos y logros históricos más importantes y pretende motivar para una indagación e investigación más profunda sobre las ideas y los hechos presentados.

Actividad 1.1

Instrucciones:

A lo largo de la historia de los tiempos, numerosos matemáticos, físicos, filósofos y astrónomos entre otros, contribuyeron de alguna u otra forma al nacimiento, desarrollo y consolidación del cálculo. Lee con atención el texto "Un poco de historia y el nacimiento del cálculo" y al finalizar, realiza **una línea del tiempo** donde indiques nombres y qué conocimientos aportaron al cálculo surgidos en las diferentes épocas. Apóyate en la descripción para realizar una línea de tiempo mostrada en el **Anexo 7.**

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 6

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Explica la importancia del cálculo, por medio del conocimiento de sus antecedentes y aplicaciones reflexionando sobre su relevancia en procesos actuales de su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s): C**oncepto de límite

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

La interpretación del concepto del concepto del límite es importante, porque muchas situaciones de nuestro contexto tienen límites, si no son considerados nos llegan a poner en aprietos, algunos ejemplos de estas situaciones son las siguientes:

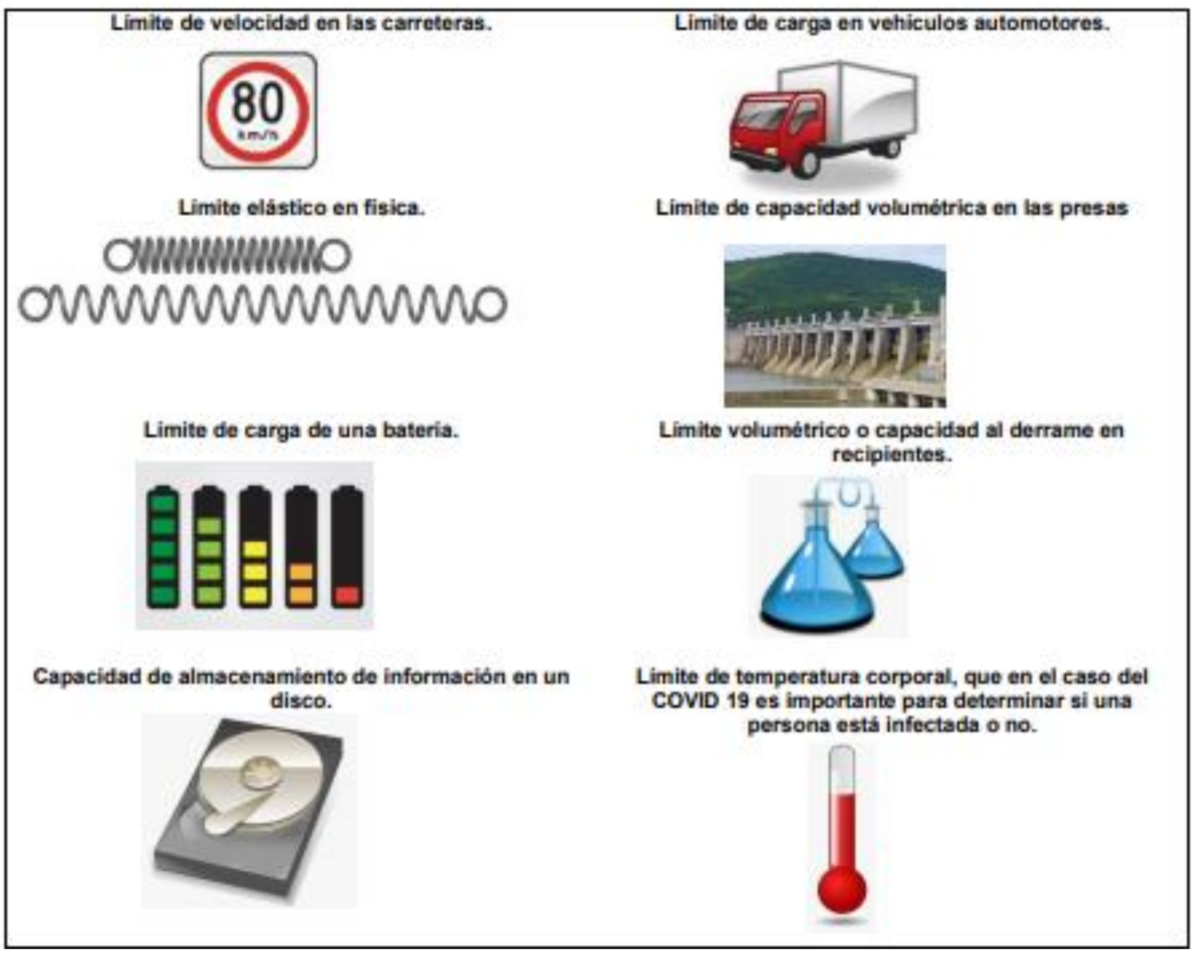


Figura 6. Ejemplos de límites en la vida cotidiana tomada de: Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios (UEMSTIS) (2020). Cálculo diferencial: curso final del período escolar 2020. México: Secretaría de Educación Pública

Analicemos un ejemplo de aplicación de los límites: Si dividimos el segundo número obtenido entre el primero, el tercero entre el segundo, el cuarto entre el tercero y así sucesivamente, ¿Qué límite se tendrá?

División	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1.5
5/3	1.6666666666666666666666666666666
8/5	1.6
13/8	1.625
21/13	1.615384615384615
34/21	1.619047619047619
55/34	1.617647058823529
89/55	1.618181818181818
144/89	1.617977528089888

Figura 7. Ejemplo de aplicación tomada de: Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios (UEMSTIS) (2020). Cálculo diferencial: curso final del período escolar 2020. México: Secretaría de Educación Pública

¿Habrá algún límite?

Límites por aproximación numérica y gráfica

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2}$.

¿Qué pasa si sustituimos x=2 en la función? Evidentemente, no está en el dominio de la función. Dicha función no está definida para el valor x=2

Analicemos su comportamiento cuando x se aproxima a 2. Para ello, construyamos la siguiente tabla de valores cercanos a 2 por el lado izquierdo y por el lado derecho, veamos qué sucede.

x	**1.8**	**1.9**	**1.99**	**1.999**	**1.9999**	**2**	**2.001**	**2.01**	**2.1**	**2.2**
f(x)	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999	No definido	1.001	1.01	1.1	1.2

Ahora, observa la gráfica, en el punto x=2 no existe valor en la gráfica, por ello se coloca un espacio en blanco. Cada vez que tomamos valores de x más cercanos, tanto por la derecha e izquierda del punto x=2, el valor al cual se aproxima la función es y=1, con solo tomar el valor de x aún más cerca de x=2

En este caso decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a 2 es igual a 1, se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$$

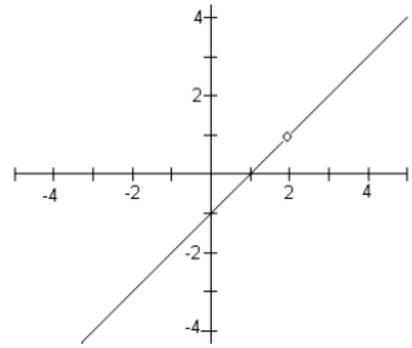


Figura 8. Gráfica límites

Ejemplo 1

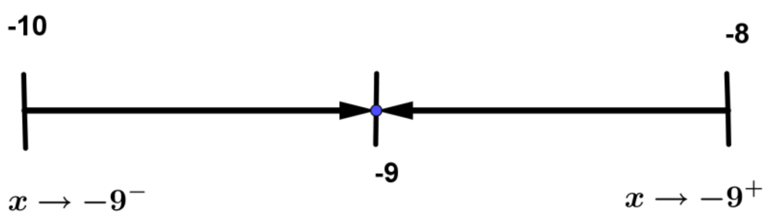
Calcula el límite de la función por aproximación numérica

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 81}{x + 9}}$$

DOMINIO = $\{x \varepsilon R \;/ x \neq -9\}$

$$\lim_{x \to -9} \left(\frac{x^2 - 81}{x + 9} \right)$$

Paso 1



Paso 2

x	f(x)
-10	-19
-9.5	.18.5
-9.3	-18.3
-9.1	-18-1
-9.01	-18-01
-9.001	-18.001
-9.0001	-18.0001

-9 -18

x	f(x)
-8	-17
-8.5	-17.5
-8.7	-17.7
-8.9	-17.9
-8.99	-17.99
-8.999	-17.999

-9 -18

Paso 3

$$\lim_{x \to -9^-} \left(\frac{x^2 - 81}{x + 9} \right) = -18 \qquad \lim_{x \to -9^+} \left(\frac{x^2 - 81}{x + 9} \right) = -18$$

CONCLUSIÓN

$$\lim_{x \to -9} \left(\frac{x^2 - 81}{x + 9} \right) = -18$$

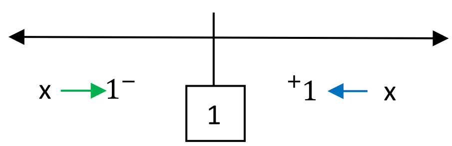
Ejemplo 2

Determine el límite de la función por aproximación numérica

$$g(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$$

x	g(x)	x	g(x)
0.2	0.806451	1.8	0.165562
0.4	0.641025	1.6	0.193798
0.6	0.510204	1.4	0.229357
0.8	0.409836	1.2	0.274725
0.9	0.369003	1.1	0.302114
0.99	0.336689	1.01	0.330022

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x-1}{x^3-1} \right) = 0.33$$



$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x-1}{x^3-1} \right) = 0.33$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x^3-1} \right) = 0.3$$

PROCEDIMIENTO METODO GRÁFICO

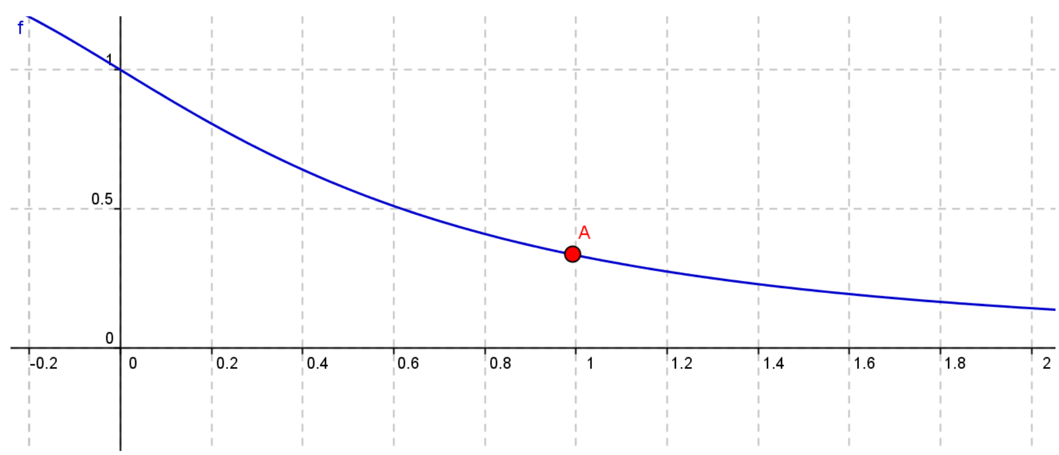


Figura 9. Gráfica ejemplo 2

Actividad 1.2

Instrucciones:

1. Completa la tabulación dándole valores a n, e identifica la aproximación al límite de esta sucesión, utiliza la tabla que se encuentra debajo para determinar los valores que se indican en la tabla desde n = 4 hasta n = 20, en la siguiente figura 10 observa el ejemplo:

N	$2-\frac{1}{n}$
1	1
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{5}{3}$
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

El cálculo para:

$n = 1$ queda: $2-\frac{1}{1}=1$

$n = 2$ queda: $2-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$n = 3$ queda: $2-\frac{1}{3}=\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

De la tabla indicada con números nos resulta por límite el valor de 2. Supongamos que "x" es una variable cuyo campo de variación es la sucesión $2-\frac{1}{n}$

$$x=2-\frac{1}{n}$$

Se dice que "X" se aproxima al límite 2, o bien que "X" tiende a 2, y se representa $x \to 2$.

La sucesión $2-\frac{1}{n}$ no contiene a su límite 2, sin embargo, la sucesión $1,\frac{1}{2},1,\frac{5}{6},1,\cdots$, en la que todos los términos impares son iguales a 1. Por tanto, una sucesión puede o no contener a su propio límite. Sin embargo, como veremos más adelante, decir que $x \to a$ implica $x \neq a$, esto es, *se sobrentenderá que cualquier sucesión dada no contiene a su límite como término.*

Figura 10 tomada de: Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios (UEMSTIS) (2020). Cálculo diferencial: curso final del período escolar 2020. México: Secretaría de Educación Pública

Determina los valores que se indican en la tabla desde n = 4 hasta n = 20 en el siguiente espacio:

n	**$2 - \frac{1}{n}$**
1	**$2 - \frac{1}{1} = 1$**
2	**$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$**
3	**$2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$**
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

n	**$2 - \frac{1}{n}$**
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Si anotas sus equivalencias en decimales ocupando una calculadora, ¿Cuál es el límite de esta sucesión?

2. Calcula los siguientes límites, considerando valores cercanos por la izquierda y por la derecha y grafica. Describe el procedimiento en tu libreta de apuntes

a. $\lim_{x \to 5}(2x^3 - 3x + 8)$
b. $\lim_{x \to 4}(3x - 5)$
c. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
d. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+10x}{2x}\right)$
e. $\lim_{x \to 10} \left(\frac{x^2-100}{x-10}\right)$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 7

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Calcula límites de funciones algebraicas y trascendentes, a través del análisis de situaciones de su contexto para la construcción de nuevos conocimientos.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Propiedades de los límites

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Límites definidos en un punto propiedades de los límites

Son aquellos que se pueden evaluar directamente en el punto al que tiende el valor, para ello se tienen las siguientes propiedades.

Tabla 8. Propiedades de los límites

DEFINICIÓN	EXPRESIÓN
El límite de una función constante *c* cuando *x* tiende al valor de *a* es la constante c.	$\lim_{x\to a} c = c$
El límite de la función identidad *f(x)*=*x* cuando *x* tiende al valor de *a* es la constante *a*.	$\lim_{x\to a} x = a$
El límite de la función $f(x) = x^n$ cuando *x* tiende al valor de *a*, es la constante *a* a la potencia *n*.	$\lim_{x\to a} x = x^n = a^n$
El límite de una función exponencial base *b* cuando *x* tiende al valor de *a*, es la función exponencial base *b* elevada al límite de la función.	$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^{f(a)}$
El límite de una función logarítmica base *b* cuando *x* tiende al valor de *a*, es el logaritmo base *b* del límite de la función.	$\lim_{x\to a} logbf(x) = logb\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$
El límite de una función trigonométrica con argumento cuando *x* tiende al valor de *a*, es la función trigonométrica del límite del argumento. El poner *Trig* es para indicar que puede ser una de las 6 funciones trigonométricas básicas.	$\lim_{x\to a} trig[f(x)] = trig\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$
El límite cuando *x* tiende al valor de *a* de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de los límites de las funciones. Esta se considera la propiedad distributiva para una suma o resta de funciones.	$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

El límite cuando x tiende al valor de a de un producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones. Esta se considera la propiedad distributiva para un producto de funciones.	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$
El límite cuando x tiende al valor de a de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de funciones. Esta se considera la propiedad distributiva para un cociente de funciones.	$\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California (2020). *Cálculo diferencial: Guía de actividades del alumno para el desarrollo de competencias.* México: COBACH BC

A continuación, se muestran algunos ejemplos de funciones algebraicas y funciones trascendentes para la obtención de límites:

Ejemplo 3

Límite de una función constante $\lim\limits_{x\to a} c = c$

$$\lim_{x\to 2} 7$$

Solución:
En este caso al no existir "x" en la función, no hay lugar para sustituir el número 2, por lo cual el resultado es el mismo número 7.

$$\lim_{x\to 2} 7 = 7$$

Ejemplo 4

El límite de la función identidad $\lim\limits_{x\to a} x = a$

$$\lim_{x\to 4} x$$

Solución:
Cuando la función solamente es x, lo único que se debe hacer es sustituir el valor de x que en este caso es 4 y obtendremos el resultado

$$\lim_{x\to 4} x = 4$$

Ejemplo 5

El límite de x a una potencia n: $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

$$\lim_{x \to 3} x^5$$

Solución:
Para solucionarlo solo basta con sustituir el valor de x que en este caso es 3 y elevarlo a la potencia 5

$\lim_{x \to 3} x^5 = 3^5$=243

Ejemplo 6

El límite de una función exponencial base b: $\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \to a} f(x)}$

$$\lim_{x \to 5} 4^{x^2}$$

Solución:

Aquí la función es $f(x) = x^2$. Para solucionarlo solo se debe sustituir el valor de x, en este caso 5, elevarlo al cuadrado y dejarlo expresado como potencia, porque si desarrollamos la potencia el número es muy grande.

Ejemplo 7

El límite de una función logarítmica base b: $\lim_{x \to a} log_b f(x) = log_b \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

$$\lim_{x \to 25} log_5[x^3]$$

Solución:
Aquí la función es $f(x) = x^3$. Para solucionarlo empleamos la propiedad y procedemos a transferir el límite dentro del argumento y se realiza el procedimiento correspondiente

$$\lim_{x \to 25} log_5[x^3] = log_5 \left[\lim_{x \to 25} x^3\right] = log_5 25^3 = 3log_5 25 = 3(2) = 6$$

Ejemplo 8

El límite de una función trigonométrica:

$$\lim_{x \to a} Trig[f(x)] = Trig\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} [sen(x)]$$

Solución:
Transferimos el límite al argumento de la función seno y evaluamos el valor correspondiente. Es importante señalar que, al ser una función trigonométrica, se debe trabajar con radianes.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} [sen(x)] = sen\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} x\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 9

El límite de una suma o resta de funciones:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - x^x + 4)$$

Solución:
Se aplica la propiedad distributiva de límite, se evalúa y se resuelve. En la fórmula se ponen dos funciones, pero pueden ser más de dos como lo muestra el ejemplo, digamos que

$$f(x) = x^3, g(x) = x^x \ y \ h(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - x^x - 4) = \lim_{x \to 2} x^3 - \mathit{lim}_{x \to 2} x^x - \lim_{x \to 2} 4$$
$$= 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

Ejemplo 10 y 11

El límite de un producto de funciones:

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$$

Solución:

Aplico la distribución de límite en el producto. Para esto consideramos las funciones $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = x + 2$

$$= \lim_{x \to 10} [(x^2+4)(x+2)] = \left[\lim_{x \to 10} (x^2+4)\right]\left[\lim_{x \to 10} (x+2)\right]$$

$$= \left[\lim_{x \to 10} x^2 + \lim_{x \to 10} 4\right]\left[x + \lim_{x \to 10} 2\right] = [10^2+4][10+2] = [100+4][10+2]$$

$$= [104][12] = 1248$$

Solución:

Se trata de otro producto $f(x) = x^2$ y $g(x) = cos\, x$, por lo tanto, distribuyo la propiedad y evalúo el correspondiente valor

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} [x^2 cos\, x] = \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} x^2\right)\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} cos\, x\right] = \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} x^2\right)\left[cos\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} x\right)\right]$$
$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi^2}{18}$$

Ejemplo 12 y 13

El límite de un cociente de funciones: $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} f(x)}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{2x+1}$$

Solución:

Al igual que los ejemplos anteriores, para encontrar la solución solo se sustituye el valor de x, que en este caso es 2 y se realizan las operaciones en el numerador y denominador, al final se realiza la división, en caso de que la división de un número no entero se dejará como fracción. Cabe señalar que aquí se combinaron las propiedades de suma, multiplicación y, la principal, división.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{\left(\lim_{x \to 2} 3\right)\left(\lim_{x \to 2} x\right) + \lim_{x \to 2} 4}{\left(\lim_{x \to 2} 2\right)\left(\lim_{x \to 2} x\right) + \lim_{x \to 2} 1} = \frac{3(2)+4}{2(2)+1} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

Solución:
Aquí se combinan las propiedades de límites de suma y de división

$$\lim_{x\to 4}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 4} e^x+\lim\limits_{x\to 4} 1}{\lim\limits_{x\to 4} e^x-\lim\limits_{x\to 4} 1}=\frac{e^{\lim\limits_{x\to 4} x}+\lim\limits_{x\to 4} 1}{e^{\lim\limits_{x\to 4} x}-\lim\limits_{x\to 4} 1}$$
$$=\frac{e^4+1}{e^4-1}$$

Nota: en los números reales no existe la división entre cero, si al realizar las sustituciones y operaciones, el denominador es cero, la función puede no tender hacia un límite, existiendo otra forma de solución.

Actividad 1.3.1

Instrucciones:

1. Determina el valor de los límites de las funciones que se les presentan:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2) =$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\ (x^2-x+9) =$

c) $\lim\limits_{x\to -2}(6-x^2)^2 =$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2^{x^2}+2^x-4\right) =$

e) $\lim\limits_{x\to -3}(x^x+x+3) =$

f) $\lim\limits_{x\to 125} log_5 x =$

g) $\lim\limits_{x\to 1}(x+e^x) =$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x}{x^2-x-12} =$

i) $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2+x)\, ln(x+1)] =$

j) $\lim\limits_{x\to 3}\{(x^2-4x)e^{4x-3}\} =$

k) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(cos\ x+sen\ x) =$

l) $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{6}}(cos\ 2x\ - csc\ 3x) =$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 8

Límites no definidos en un punto

Este tipo de límites tiene dos situaciones:

- Forma CERO ENTRE CERO.
- Forma INFINITO ENTRE INFINITO.

Ninguno de estos dos casos se realiza como los del ejercicio anterior, pues al hacerlo nos toparemos con el problema de que quede como resultado CERO ENTRE CERO o INFINITO ENTRE INFINITO.

I. Forma cero entre cero

Ejemplo 14

Consideremos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$$

El primer paso es evaluar directamente

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{3^2 - 7(3) + 12}{3 - 3}$$

$$\frac{9 - 21 + 12}{0} = \frac{21 - 21}{0} = \frac{0}{0}$$

Se confirma que es de la forma CERO ENTRE CERO, por lo tanto, se procede a la estrategia de factorización:

Factorizo	$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-4)(x-3)}{x-3}$
Simplifico	$= \lim_{x\to 3}(x-4)$
Aplico propiedades	$= \lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 4$
Evalúo	$= 3 - 4$
Obtengo el resultado	$= -1$

Ejemplo 15

Ahora consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

Si hacemos el mismo procedimiento que el caso anterior, forma directa, confirmaremos la forma CERO ENTRE CERO, por lo tanto, procedemos al siguiente procedimiento:

Factorizo	$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$
Simplifico	$\lim_{x \to 4}(\sqrt{x}+2)$
Aplico propiedades	$\sqrt{\lim_{x \to 4} x} + \lim_{x \to 2} 2$
Evalúo	$= 2 + 2$
Obtengo el resultado	$= 4$

Actividad 1.3.2

Instrucciones:

1. Determina el valor de los límites de las funciones que se les presentan:

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x+3} =$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{9x^2-6x}{3x} =$
3. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} =$
4. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-x-12}{x^2-6x+8} =$
5. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} =$
6. $\lim_{x \to 8} \frac{x+8}{x^2-64} =$
7. $\lim_{x \to -2} \frac{7x^3+14x^2}{14x^2+28x} =$
8. $\lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x^2-16} =$
9. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$
10. $\lim_{x \to 16} \frac{x-16}{2\sqrt{x}-8} =$
11. $\lim_{x \to 9} \frac{9-x}{6-2\sqrt{x}} =$
12. $\lim_{x \to 8} \frac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2} =$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 8

II. Forma infinito entre infinito

Ejemplo 16

Considerar el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+8}{x^2+4x-2}$

Ten en cuenta el siguiente Teorema

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Evaluar directamente nos llevará, sin duda alguna, al resultado INFINITO ENTRE INFINITO, lo que ahora se lleva a cabo es lo siguiente:

Divido cada término por la variable de máximo grado	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$
Simplifica cada expresión aplicando leyes de los exponentes	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}$
Aplico las propiedades	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{\lim\limits_{x\to\infty} x}+\frac{8}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}}{1+\frac{4}{\lim\limits_{x\to\infty} x}-\frac{2}{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}}$
Evalúo y simplifico: todo término que contenga el infinito se hará cero	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{\infty}+\frac{8}{\infty^2}}{1+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}} = \frac{2-0-0}{1+0-0}$
Obtengo el resultado	$\frac{2}{1}$=2

Actividad 1.3.3

Instrucciones:
Determinen el valor de los límites de las funciones que se les presentan:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+6}{2x^2+9x} =$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-5x^2+6}{7x-3x^2+9x^3} =$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^4+2x^2+5x}{3x-3x^2+3x^4} =$
4. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{6t^3-4t^2+7t-8}{2+6t-t^2+3t^3} =$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^3-5x^2+3}}{\sqrt{x-x^2+4x^3}} =$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6-n^3}{n^3-5n^2+2} =$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 8

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE II. La Derivada

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Emplea la regla de los 4 pasos para obtener la derivada de una función.
- **Atributo:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Derivada por definición de funciones polinómicas (regla de los 4 pasos).

Conocimientos previos

Para resolver los ejercicios de esta sección es importante que recuerdes

a. Solución de binomios de la forma $(a+b)^2, (a+b)^3 \dots etc.$.
b. Racionalización
c. Factorización de términos algebraicos.
d. Límites (Bloque I)

Lectura previa

La derivada como razón de cambio o incremento

Cuando calculamos la razón de cambio promedio, geométricamente estamos calculando el valor de la pendiente de la recta secante función f(x) que pasa por los puntos A y B. Por otra parte, cuando calculamos la razón de cambio instantánea estamos calculando la pendiente de la recta tangente a la función f(x) en un único punto A. Figura 11

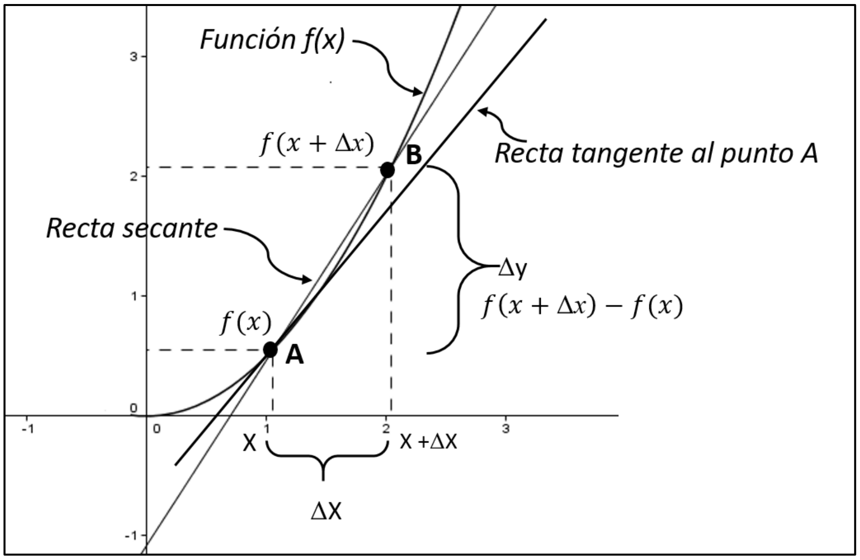


Figura 11. Razón instantánea

La pendiente de la recta secante se obtiene con la expresión

$$m_{AB} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora bien, si el incremento en el eje x tiende a cero $\Delta x \to 0$, es decir, el punto B se acerca lo más posible al punto A, se traza una recta tangente en dicho punto, la pendiente de la recta tangente se obtiene con la siguiente expresión.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En conclusión, la derivada de una función se puede obtener como el límite del cociente de incrementos, conocido como la regla de los cuatro pasos.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los 4 pasos

Paso 1: Se reemplaza la variable independiente x por (x+Δx) en f(x) (función original)
Paso 2: A la sustitución anterior se resta f(x) (función original).
Paso 3: Dividir entre Δx (incremento)
Paso 4: Se calcula la derivada, aplicando el límite cuando Δx (incremento) tiende a cero

Ejemplo 1

De acuerdo con la función $f(x)$=5x+10 determina la derivada por el método de los 4 pasos.

Paso 1

$$f(x) = 5x + 10$$
$$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x) + 10$$

Paso 2

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) - f(x) &= (5(x+\Delta x) + 10) - (5x+10) \\ &= \cancel{5x} + 5\Delta x + \cancel{10} - \cancel{5x} - \cancel{10} \\ &= 5\Delta x \end{aligned}$$

Paso 3

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$$

Paso 4

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$$

Ejemplo 2

De acuerdo con la función $f(x) = 2x^3 + 6$ *determina la derivada por el método de los 4 pasos.*

Paso 1

$$f(x) = 2x^3 + 6$$

$$f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^3 + 6$$

Paso 2

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x)-f(x) &= (2(x+\Delta x)^3+6)-(2x^3+6)\\
&= 2(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)+6-2x^3-6\\
&= \cancel{2x^3}+6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3+\cancel{6}-\cancel{2x^3}-\cancel{6}\\
&= 6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3
\end{aligned}
$$

Paso 3

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta \mathrm{x}} &= \frac{6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3}{\Delta x}\\
&= \frac{\cancel{\Delta x}(6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2)}{\cancel{\Delta x}}\\
&= 6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2
\end{aligned}
$$

Paso 4

$$
f\,'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} 6x^2+6x\Delta x+2\Delta x^2=6x^2
$$

Ejemplo 3

De acuerdo con la función $f(x)=\frac{4}{x^2+1}$ *determina la derivada por el método de los 4 pasos.*

Paso 1

$$
f(x)=\frac{4}{x^2+1}
$$

$$
f(x+\Delta x)=\frac{4}{(x+\Delta x)^2+1}
$$

Paso 2

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta x)-f(x) &= \left(\frac{4}{(x+\Delta x)^2+1}\right)-\left(\frac{4}{x^2+1}\right)\\
&= \frac{4(x^2+1)-4((x+\Delta x)^2+1)}{((x+\Delta x)^2+1)(x^2+1)}\\
&= \frac{4x^2+4-4(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}=\frac{\cancel{4x^2}\cancel{+4}\cancel{-4}\cancel{-4x^2}-8x\Delta x-4\Delta x^2-4}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}\\
&= \frac{-8x\Delta x-4\Delta x^2}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

Paso 3

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{-8x\Delta x-4\Delta x^2}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{-8x\Delta x-4\Delta x^2}{\Delta x\,(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{\cancel{\Delta x}(-8x-4\Delta x)}{\cancel{\Delta x}\,(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{-8x-4\Delta x}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}$$

Paso 4

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-8x-4\Delta x}{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{-8x-4(0)}{(x^2+2x(0)+(0)^2+1)(x^2+1)}$$

$$=\frac{-8x}{(x^2+1)(x^2+1)}=\frac{-8x}{(x^2+1)^2}$$

Actividad 2.1

Instrucciones:

1. Calcula la derivada de cada una de las funciones utilizando el método de los 4 pasos. Escribe el procedimiento de forma, clara y ordenada en tu libreta.

   a. $f(x)=x^2+x$

   b. $f(x)=3x^3-1$

   c. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$

   d. $f(x)=\frac{x}{2x-5}$

   e. $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

   f. $f(x)=6x+9$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica fórmulas o teoremas de derivación para la solución de funciones algebraicas.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Derivadas de funciones algebraicas

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

Aplicar la derivada por definición resulta ser laboriosa y complicada entre más operaciones tiene una función, por esta razón hay formas más eficaces para calcular derivadas de las funciones, las cuales se conocen como **teoremas o fórmulas de derivación**. En esta actividad analizarás los ejemplos resueltos de derivación de funciones aplicando los teoremas o fórmulas de derivación, comencemos por observar lo siguiente:

La notación para la derivada de funciones explícitas es:

$$\boldsymbol{f'(x) \text{ o } \frac{d}{dx}[f(x)] \text{ o } \frac{dy}{dx}}$$

<u>Derivada de una constante</u>

Sea $f(x) = 5$

<u>Solución:</u>

$f(x + \Delta x) = 5$ // determinamos la función incremento

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(5)-(5)}{\Delta x}$ //sustituimos en la definición de derivada

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$ // calculando el límite

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0$

$f'(x) = 0$ // concluimos que la derivada de una constante es cero

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[c] = 0}$$

Teorema 1.1 Regla o fórmula de la función constante
Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces $f'(x) = 0$

<u>Derivada de la función identidad</u>
Sea $f(x) = x$

<u>Solución:</u>

$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$ //determinamos la función incremento
$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x$
$= x + \Delta x - x = \Delta x$
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$ // calculando el límite

$f'(x) = 1$ // como el límite existe tenemos la función derivada

Concluimos que la derivada de la función identidad es la unidad

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}[x] = 1}$$

Teorema 1.2 Regla o fórmula de la función identidad
Si $f(x) = x$ es una función identidad, entonces $f'(x) = 1$

Las siguientes fórmulas algebraicas se ocuparán para separar a la variable independiente y la constante de las operaciones básicas, por lo tanto, ya no se comprobarán, pero se verá cómo se aplica.

También es importante considerar que:

Teorema 1.3 Regla o fórmula de la multiplicación por constante
Si c es cualquier constante y f es diferenciable en x, entonces *cf* es diferenciable en x $$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$$

Es decir, la derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función

Consideremos que u y v son funciones que dependen de la variable independiente.

<u>Derivada de la suma y diferencia de funciones</u>

Teorema 1.4 Regla o fórmula de la suma	
Si u y v son derivables entonces: $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$	**propiedad distributiva de la derivada**

Es decir, la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada uno de los términos por separado, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4

Calcula $f(x) = 5 - x$

Solución:

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(5 - x)$ // aplicando el símbolo de la derivada de una función

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}5 - \frac{d}{dx}x$ // distribuyendo la derivada, para calcular las derivadas por separado

$\frac{d}{dx}f(x) = 0 - 1$ // calculando las derivadas, aplica las reglas 1.1 y 1.2

$\frac{d}{dx}f(x) = -1$

Ejemplo 5

Calcula la derivada de la función $f(x) = 3x + 8$

Solución:

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(3x + 8)$ // aplicando el símbolo de la derivada de una función

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}8$ // distribuyendo la derivada

$\frac{d}{dx}f(x) = 3\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}8$ // sacando la constante, aplica la regla 1.3

$\frac{d}{dx}f(x) = 3(1) + 0$ // calculando las derivadas, aplica la regla 1.1 y 1.2

$\frac{d}{dx}f(x) = 3$

Actividad 2.2.1

Instrucciones

1. Resuelve en tu cuaderno las siguientes derivadas

   a. $y = x + 5$
   b. $y = 3x$
   c. $y = x + 6$
   d. $y = x + 10$
   e. $y = 3x - 5$
   f. $y = -5 - 8x$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

La regla de la potencia para la derivación fue obtenida por los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, de manera independiente, para funciones de potencias racionales a mediados del siglo XVII, ambos la utilizaron para obtener la regla potencia para integrales de manera inversa.

Figura 12 tomada de internet: https://camposdetierra.net/category/mundo-matematico/

<u>Derivada de un producto de funciones</u>

Teorema 1.5 Regla o fórmula del producto
Si tanto u como v son derivables en tal caso: $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 6

Sea $f(x) = 3x$

<u>Solución</u>

$f'(x) = \frac{d}{dx}3x$ // aplicando el símbolo de derivada de una función
$f'(x) = 3\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}3$ // usando la derivada del producto
$f'(x) = 3(1) + x(0)$ // calculando las derivadas
$f'(x) = 3$ // simplificando

Actividad 2.2.2

Instrucciones

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = 2x - 3$
b. $f(x) = \frac{5}{2}x$
c. $f(x) = -3 - 6x$
d. $f(x) = \frac{2}{5} + \frac{3}{2}x$
e. $f(x) = (6x - 1)(2x + 5)$
f. $f(x) = (3x - 5)(2 - x)$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

Derivada de la potencia de una función

Teorema 1.6 Regla o fórmula de la potencia
Si n es cualquier número real entonces: $$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Ejemplo 7

Calcular la derivada de la siguiente función $f(x) = x^3$

Solución

$f'(x) = \frac{d}{dx}x^3$ // aplicando el símbolo de derivada de la función

$f'(x) = 3x^{3-1}$ // aplicando la fórmula
$f'(x) = 3x^2$

Ejemplo 8

Calcula la derivada de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{x^3}$

Solución:

$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3}$ // aplicando el símbolo de derivada
$f'(x) = \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}}$ // aplicando la propiedad de los radicales $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ // aplicando la fórmula y resolviendo $\frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

Regla de la Cadena

Teorema 1.7 Regla o fórmula de la cadena
$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

Ejemplo 9

Calcula la derivada de la función $f(x) = (2x+1)^3$

Solución

Sea u= $2x + 1$ // el cambio de variable
$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+1)$ //aplicando el símbolo de la derivada

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1$ // distribuyendo la derivada

$\frac{du}{dx} = 2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}1$ // sacando la constante de la derivada
$\frac{du}{dx} = 2$ // tenemos que, $\frac{d}{dx}x = 1$ y $\frac{d}{dx}1 = 0$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x+1)^3$ // aplicando la derivada
$f'(x) = \frac{d}{dx}u^3$ // realizando el cambio de variable
$f'(x) = 3u^{3-1}\frac{du}{dx}$ //aplicando la fórmula
$f'(x) = 3(2x+1)^2(2)$ // regresando el cambio de variable
$f'(x) = 6(2x+1)^2$

Actividad 2.2.3

Instrucciones:

1. Halla la derivada de las funciones, escribe el procedimiento en tu libreta

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$
4. $f(x) = (x + \sqrt{3})^2$
5. $f(x) = (x^4 - 15)^{15}$
6. $f(x) = x\sqrt{4-x}$
7. $f(x) = \sqrt{x^2+3}$
8. $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 3x^3 + x)^3}$
9. $f(x) = (x + (x^2-4)^3)^{10}$
10. $f(x) = (x^6 - 7)^4(6x - 2x^4)^5$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

<u>Derivada de la división de funciones</u>

Teorema 1.8 Regla o fórmula del cociente

Si tanto U como V son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplo 10

Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{x}{2}$

<u>Solución</u>

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{x}{2})$ //aplicando el símbolo de derivada de una función

$f'(x) = \frac{2\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}2}{(2)^2}$ // aplicando la fórmula

$f'(x) = \frac{2(1) - x(0)}{4}$ //sabemos que $\frac{d}{dx}x = 1$ y $\frac{d}{dx}2 = 0$

$f'(x) = \frac{2-x}{4}$

Aplicación en una situación cotidiana y/o hipotética

Analiza el siguiente ejemplo y reflexiona sobre la aplicación de las derivadas en la solución de situaciones reales y/o hipotéticas.

Ejemplo 11

El petróleo de un buque cisterna se está fugando en formas de una película circular sobre la superficie del agua. Si el radio del círculo aumenta a razón de 3 metros por minuto, ¿a qué velocidad se incrementa el área del círculo cuando el radio es de 200 metros?

Figura 13. Buque

Datos

$\frac{dr}{dt} = 3\frac{m}{min}$ // razón de la fuga del petróleo

$radio = 200\ m$

Solución:

$A = \pi r^2$ // fórmula para calcular el área del círculo

$\frac{dA}{dr} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ // derivada

$\frac{dA}{dr} = 2(\pi)(200\ m)(3\frac{m}{min})$ // sustitución de datos

$\frac{dA}{dr} = 1200\pi \frac{m^2}{min}$

Actividad 2.2.4

Instrucciones:

1. Calcula la derivada de las funciones, escribe el procedimiento en tu libreta.

a. $\boldsymbol{f(x) = \frac{7}{x}}$
b. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$
c. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+2}}$
d. $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+5}}}$
e. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$
f. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-5}{2-x}}$
g. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^5}{(3x+1)^4}}$
h. $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}}$
i. $\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}}$
j. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x(2x-5)^4}{(x+1)^8}}$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica fórmulas o teoremas de derivación para la solución de funciones trascendentes.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Derivada de funciones trascendentes.

Conocimientos previos

Para resolver los ejercicios de esta sección es importante que recuerdes

a. Propiedades de los logaritmos
b. Propiedades de los exponentes
c. Identidades trigonométricas

Podrás consultar los anexos que se encuentran al final del cuadernillo.

Derivada de funciones trascendentes; trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales, logarítmicas.

Teoremas de derivación de funciones trigonométricas

Teorema 2.1 $\frac{d(sen\, u)}{dx} = \cos u \, \frac{du}{dx}$

Teorema 2.2 $\frac{d(\cos u)}{dx} = -\text{sen}\, u \, \frac{du}{dx}$

Teorema 2.3 $\frac{d(\tan u)}{dx} = sec^2\, u \frac{du}{dx}$

Teorema 2.4 $\frac{d(cot\, u)}{dx} = -csc^2\, u \frac{du}{dx}$

Teorema 2.5 $\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \; tan\, u \frac{du}{dx}$

Teorema 2.6 $\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

Teoremas de derivación de funciones trigonométricas inversas

Teorema 2.7 $\frac{d(\text{arcsen u})}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \; \frac{du}{dx}$

Teorema 2.8 $\frac{d(\arccos u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \; \frac{du}{dx}$

Teorema 2.9 $\frac{d(\arctan u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

Teorema 2.10 $\frac{d(\operatorname{arccot} u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\ \frac{du}{dx}$

Teorema 2.11 $\frac{d(\operatorname{arcsec} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\ \frac{du}{dx}$

Teorema 2.12 $\frac{d(\operatorname{arccsc} u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\ \frac{du}{dx}$

Teoremas de derivación de funciones exponenciales y logarítmicas

Teorema 2.13 $\frac{d(a^u)}{dx} = a^u \ln a\ \frac{du}{dx}$

Teorema 2.14 $\frac{d(e^u)}{dx} = e^u\ \frac{du}{dx}$

Teorema 2.15 $\frac{d(log_a u)}{dx} = \frac{log_a e}{u}\ \frac{du}{dx}$

Teorema 2.16 $\frac{d(ln\, u)}{dx} = \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx}$

Ejemplo 12

$y = \tan 7x$

Utiliza el teorema 2.3 donde u=7x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\tan 7x)}{dx} = sec^2\ 7x\,\frac{d(7x)}{dx}$$
$$= sec^2\ 7x\ (7)$$
$$= 7sec^2\ 7x$$

Ejemplo 13

$y = e^{3x+5}$

Utiliza el teorema 2.14 donde u=3x + 5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{3x+5})}{dx} = e^{3x+5}.\frac{d(3x+5)}{dx}$$
$$= e^{3x+5}.(3)$$
$$= 3e^{3x+5}$$

Ejemplo 14

$y = \frac{1}{2}\cos 2x + sen\ x$

Utiliza el teorema 1.4 (suma)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\cos 2x)}{dx} + \frac{d(sen\ x)}{dx}$$

Utiliza el teorema 2.2 y 2.1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(-\operatorname{sen} 2x\ \frac{d(2x)}{dx}\right) + \cos x\,\frac{d(x)}{dx}$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\ \ (2) + \cos x\,(1)$$
$$= -Sen\ 2x\ + cos\ x$$

Ejemplo 15

$$y = \arctan(x^2 - 3)$$

Utiliza el teorema 2.9

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\arctan(x^2-3))}{dx}$$
$$= \frac{1}{1+(x^2-3)^2}.\frac{d(x^2-3)}{dx}$$
$$= \frac{1}{1+(x^4-6x^2+9)}.(2x)$$
$$= \frac{2x}{x^4-6x^2+10}$$

Ejemplo 16

$$y = \frac{sen^2 x}{cos\ x} = \frac{(sen\ x)^2}{\cos x}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

$$y = \frac{sen\ x.sen\ x}{cos\ x} = \tan x.sen\ x$$

Utiliza el teorema 1.5 (producto de funciones)

$$\frac{dy}{dx} = sen\ x \frac{d(tan\ x)}{dx} + tan\ x \frac{d(sen\ x)}{dx}$$

Utiliza el teorema 2.3 y 2.1

$$\frac{dy}{dx} = sen\ x\left(sec^2 x\frac{d(x)}{dx}\right) + \tan \mathrm{x}\left(\cos x\frac{d(x)}{dx}\right)$$
$$= sen\ x\ sec^2 x\ (1) + \tan x.\cos x\ (1)$$
$$= sen\ x\ sec^2 x + sen\ x$$
$$= senx(sec^2 x + 1)$$

Ejemplo 17

$$y = \ln(\sec x) - 3^{3x}$$

Utiliza el teorema 1.4 (suma)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ln\sec x)}{dx} - \frac{d(3^{3x})}{dx}$$

Utiliza el teorema 2.5, 2.13 y 2.16

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x}.\frac{d\ (\sec x)}{dx} - 3^{3x}.ln\ 3\ \frac{d(3x)}{dx}$$
$$= \frac{1}{sec\ x}(\sec x.\tan x) - 3^{3x}.ln\ 3\ (3)$$
$$= \tan x - 3.\ln 3.3^{3x}$$

Utilizando la propiedad de logaritmo

$$\log a^b = b.\log a$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x - \ln 3^3.3^{3x}$$

Actividad 2.3

Instrucciones:

1. Calcula la derivada de cada una de las funciones trascendentes utilizando los teoremas. Escribe el procedimiento de forma, clara y ordenada en tu libreta.

   a. $y = \sec x\ \tan x$
   b. $y = \cos 3x^4 + \tan 5x$
   c. $y = \frac{\cot x}{x+1}$
   d. $y = \frac{cos^2 x}{sen\ x}$
   e. $y = sec^2(4x^3 + 2x)$
   f. $y = sen^3 x^2$
   g. $y = \text{arc}\cos(2x + 1)$
   h. $y = arc\tan e^x$
   i. $y = xe^{3x^2+2x}$
   j. $y = e^{-x^2} + e^{2x}$
   k. $y = \ln(\sec x + \tan x)$
   l. $y = ln\sqrt{3x + 1}$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 9

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE III. Aplicaciones de la Derivada

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
- **Conocimiento (s):** Máximos, mínimos y puntos de inflexión

Lectura previa

En este bloque comprenderás la importancia del cálculo en la resolución de problemas que involucran situaciones de optimización de recursos, ya sea económicos y/o ambientales

Las abejas…., en virtud de una cierta intuición geométrica…, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.

Papus de Alejandría

Situación didáctica 1

Máximos y mínimos

La temperatura de un lugar es una de sus principales características, y es conveniente conocerla para planear las actividades. La gráfica representa la variación de la temperatura de una ciudad durante un día. Observa detenidamente la gráfica y responde lo que se te pide.

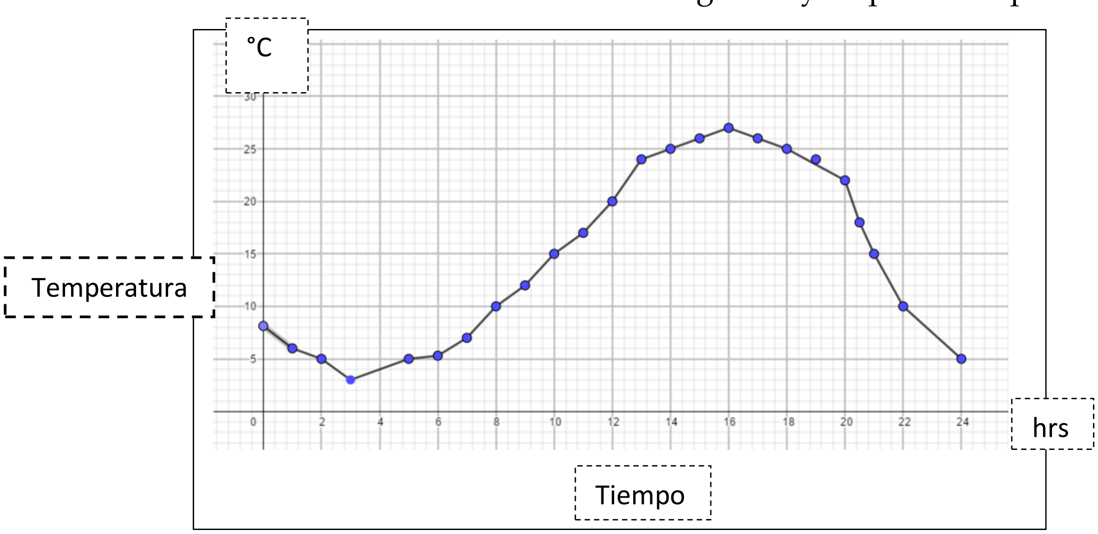


Figura 14. Gráfica variación de la temperatura

a) ¿En qué intervalos de horas disminuyó la temperatura? ______________________________

b) ¿En qué intervalos de horas aumentó? ______________________________

c) ¿A qué hora se presentó la temperatura mínima? _____________ ¿Y la máxima? ________

d) ¿Cuáles fueron, aproximadamente, dichas temperaturas? ______________________________

e) ¿Con qué rapidez pasó de la temperatura mínima a la máxima? ____________________

f) ¿Con qué rapidez disminuyó la temperatura entre las 16 y 24 horas?

Extremos absolutos y relativos

Actividad 3.1.1

Instrucciones:

1. Realiza en tu libreta esta actividad
2. Observa detenidamente las imágenes de la montaña rusa y contesta lo que se te solicita

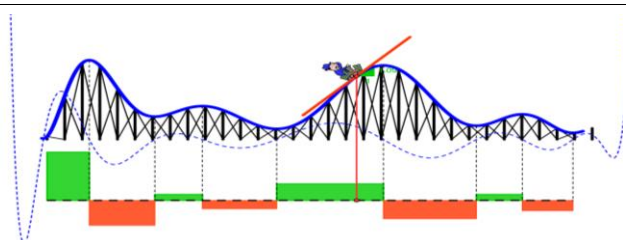


Figura 15.1

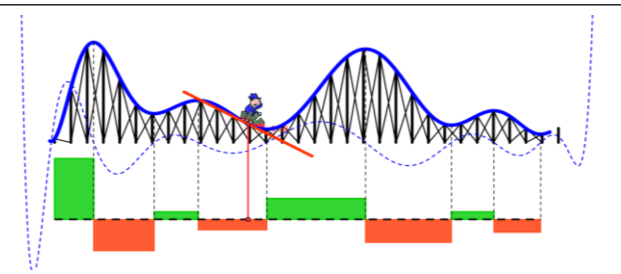


Figura 15.2

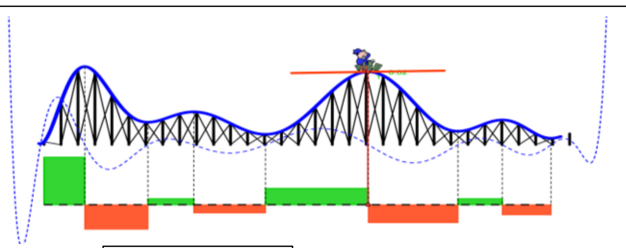


Figura 15.3

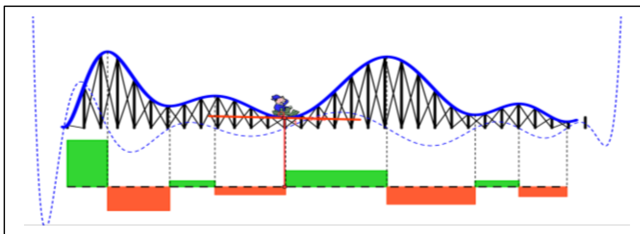


Figura 15.4

1. En la figura 15.1, el carrito está ____________________ y la pendiente de la recta tangente tiene signo __________________
2. En la figura 15.2, el carrito está ____________________ y la pendiente de la recta tangente tiene signo __________________
3. En la figura 15.3, el carrito está ____________________ y la pendiente de la recta tangente es __________________
4. En la figura 15.4, el carrito está ____________________y la pendiente de la recta tangente es ____________

Evaluación

- Esta es una actividad para la evaluación formativa

Extremos de una función

En la gráfica de algunas funciones se pueden observar valores que son el punto más alto o el más bajo de la gráfica, es decir, el valor máximo o el valor mínimo de la función.

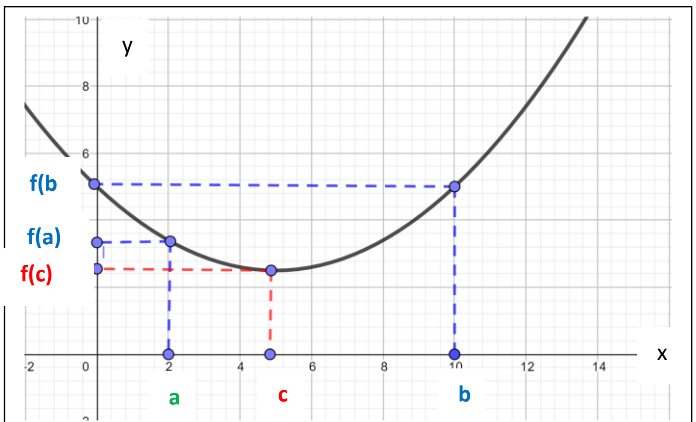


Figura 16a

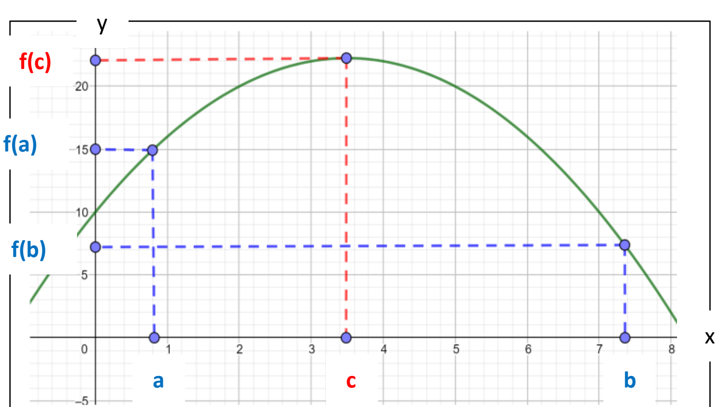


Figura 16b

$f(c)$ es un mínimo relativo de f si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto (a,b) que contiene a c (figura 16a)

$(c, f(c))$ es el punto más bajo de la gráfica

$f(c)$ es un máximo relativo de f si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto (a ,b) que contiene a c (figura 16b)

$(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica

Los máximos o mínimos relativos se encuentran en los puntos donde las gráficas tienen una línea tangente horizontal, es decir donde su derivada es igual a cero $f'(x) = 0$

NOTA: Recuerda que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de una curva

Ejemplo 1 y 2

Localizar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

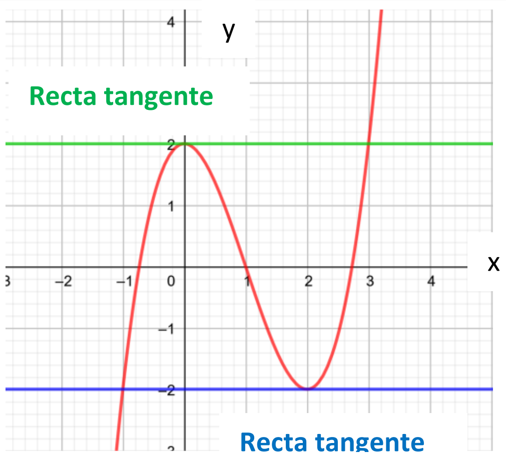


Figura 17. Gráfica ejemplo 1

Para x=0, se tiene un máximo en 2, ya que la recta tangente es horizontal en x = 0. $(f'(0) = 0$

Punto máximo en (0,2)

Para x = 2, se tiene un mínimo en -2, ya que la recta tangente es horizontal en x = -2. $(f'(2) = 0$

Punto mínimo en (2, -2)

Localizar los extremos relativos de la función $f(x) = |x|$

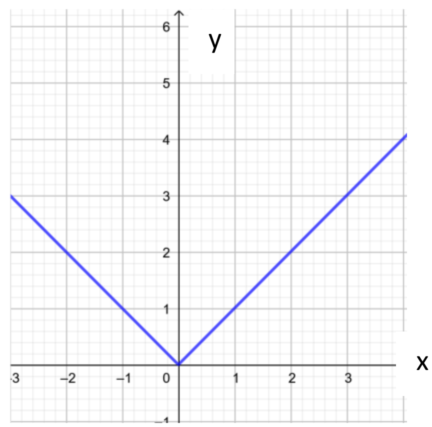


Figura 18. Gráfica ejemplo 2

La gráfica tiene un mínimo relativo de 0 en x = 0, porque $f'(0) = 0$ no está definida y tiene un pico en x = 0

NOTA: Los extremos relativos se dan solamente en puntos donde la derivada es cero o no está definida

TEOREMA DE ROLLE

A los puntos donde la derivada de la función es igual a cero ($f'(x) = 0$), o bien, donde la derivada de la función no está definida, se llaman *puntos críticos*

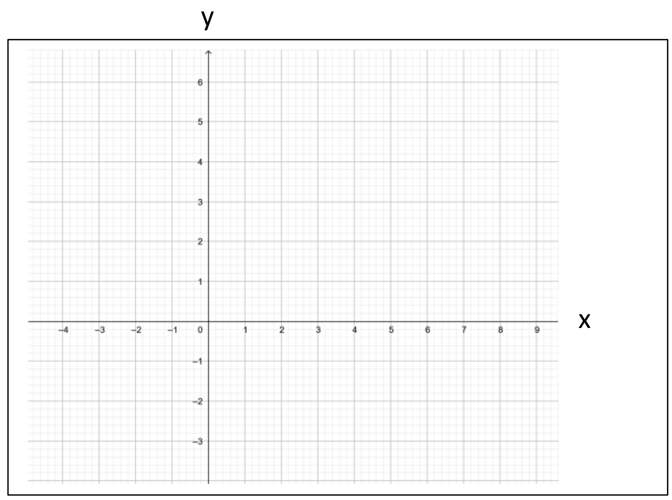
Actividad 3.1.2

Instrucciones:

1. Realiza en tu libreta esta actividad
2. Obtén la representación gráfica de cada función. Auxíliate de la tabla anexa y con esto determina el punto máximo y mínimo de cada función en el intervalo indicado.

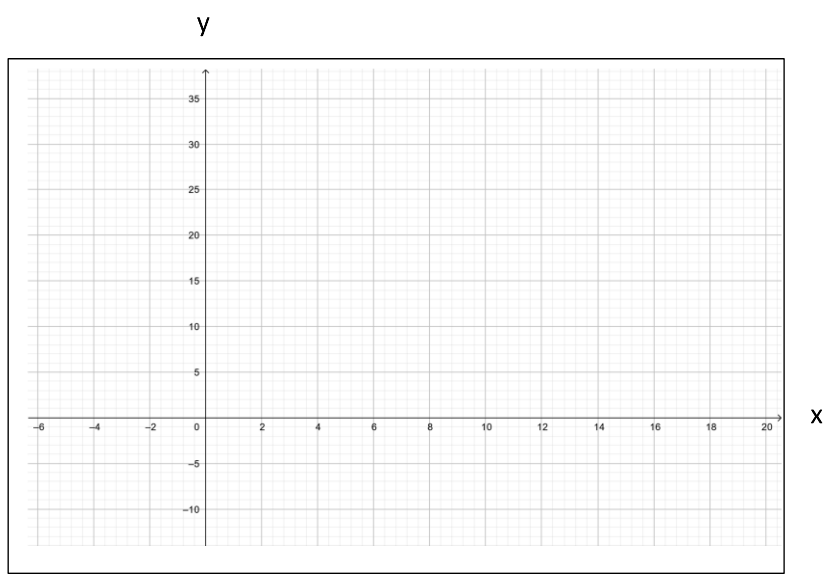
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

x	f(x)
-1	
0	
1	
2	
3	



b) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$

x	f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



Evaluación

- Esta es una actividad para la evaluación formativa

Cálculo de extremos relativos

Si f es una función continua, los puntos extremos de f se calculan siguiendo los siguientes pasos:

1. Derivar la función
2. Igualar la derivada a cero y se resuelve la ecuación para obtener los valores críticos
3. Se evalúan cada uno de los valores críticos obtenidos, sustituyendo primero un valor menor y posteriormente uno mayor. Los valores numéricos no interesan, lo que importa son los signos de esos valores.
4. Se tiene un máximo cuando el signo cambia de + a –
5. Se tiene un mínimo cuando el signo cambia de – a +
6. Si no hay cambio de signo, significa que la función no tiene máximo ni mínimo

Ejemplo 3

Calcular los puntos máximo y mínimo de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

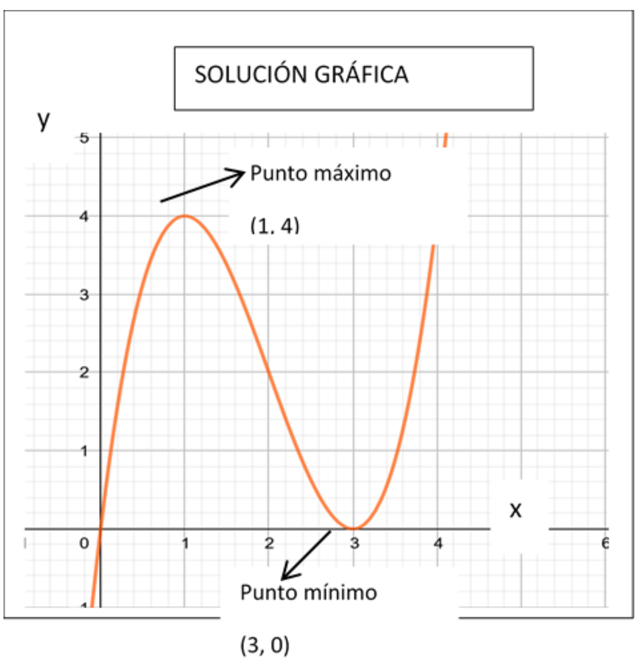


Figura 19. Gráfica ejemplo 3

SOLUCIÓN ANALÍTICA

Paso 1. Derivar la función

$$\boldsymbol{y = x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

Paso 2. Igualar a cero la derivada

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Simplificar la ecuación, dividiéndola entre 3

$$\frac{3x^2 - 12x + 9}{3} = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolver la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Valores críticos

$$x_1 = 1 \quad y \quad x_2 = 3$$

Paso 3. Evaluar los valores críticos, analizando valores menores y mayores

$x_1 = 1$

$x = 0$ $x = 2$

Sustituir cada valor en la derivada $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9$$

$$f'(0) = +9$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9$$

$$f'(2) = -3$$

Conclusión: Cambio de signo de + a -, significa que en x= 1 , se tiene un máximo.

Para calcular la coordenada del punto máximo, se sustituye x=1 en la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1)$$

$$f(1) = 4$$

Continuando con el paso 3, se evalúa el segundo valor crítico, tomando valores inferiores y superiores

$x_2 = 3$

$x = 2$ $x = 4$

Sustituir cada valor en la derivada $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9$$

$$f'(0) = -3$$

$$f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9$$

$$f'(2) = +9$$

Conclusión: Cambio de signo de - a +, significa que en x= 3, se tiene un mínimo.

Para calcular la coordenada del punto mínimo, se sustituye x=3 en la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3)$$

$$f(3) = 0$$

CONCLUSIÓN

PUNTO MÁXIMO

(1, 4)

PUNTO MÍNIMO

(3, 0)

Actividad 3.1.3

1. Realiza en tu libreta esta actividad
2. Calcula los puntos críticos de cada función, señala cuáles son sus extremos relativos y realiza la representación gráfica de cada función.

a. $f(x) = x^2 + 4x + 3$
b. $f(x) = x^2 + 6x - 4$
c. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$
d. $f(x) = x^3 - 3x + 4$
e. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$
f. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
g. $f(x) = x^3 + 9x^2 - 15x - 9$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 10

Ejemplo de aplicación

1. El departamento de inmunología determina la propagación que tiene un virus el cual se mide en una escala de 0 a 50 y es expresada por la función $V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido desde que comienza el estudio (t=0). Determina en qué momento se tendrá el máximo y el mínimo de contagio del virus en las primeras 6 horas.

SOLUCIÓN GRÁFICA

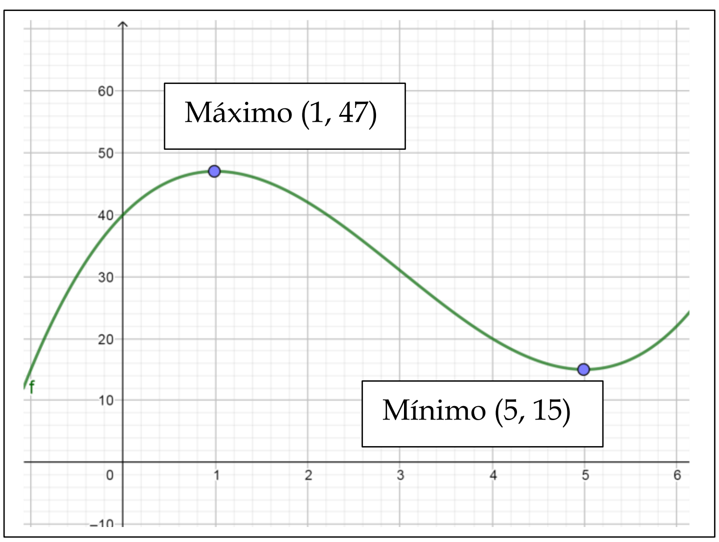


Figura 20. Gráfica ejemplo de aplicación

SOLUCIÓN ANALÍTICA

Paso 1. Derivar la función

$$\boldsymbol{V(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3}$$

$$V`(t) = 15 - 18t + 3t^2$$

Paso 2. Igualar a cero la derivada

$$15 - 18t + 3t^2 = 0$$

Simplificar la ecuación, dividiéndola entre 3 y ordenar de forma descendente

$$\frac{15 - 18t + 3t^2}{3} = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

Resolver la ecuación

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t-5)(t-1) = 0$$

Valores críticos

$$t_1 = 1 \quad y \quad t_2 = 5$$

Paso 3. Evaluar los valores críticos, analizando valores menores y mayores

$$t_1 = 1$$

$$t = 0 \qquad t = 2$$

Sustituir cada valor en la derivada

$$V`(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

$$V'(0) = 3(0)^2 - 18(0) + 15$$

$$f'(0) = +15$$

$$V'(2) = 3(2)^2 - 18(2) + 9$$

$$f'(2) = -15$$

Conclusión: Cambio de signo de + a -, significa que en t= 1, se tiene un máximo.

Para calcular la coordenada del punto máximo, se sustituye t=1 en la función $V(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 40$

$$V(1) = (1)^3 - 9(1)^2 + 15(1) + 40$$

$$V(1) = 47$$

CONCLUSIÓN

PUNTO MÁXIMO

(1, 47)

PUNTO MÍNIMO

(5, 15)

Continuando con el paso 3, se evalúa el segundo valor crítico, tomando valores inferiores y superiores

$$t_2 = 5$$

$$t = 4 \qquad t = 6$$

Sustituir cada valor en la derivada

$$V'(t) = 3t^2 - 18t + 15$$

$$V'(4) = 3(4)^2 - 18(4) + 15$$

$$V'(4) = -9$$

$$V'(6) = 3(6)^2 - 18(6) + 15$$

$$f'(2) = +15$$

Conclusión: Cambio de signo de - a +, significa que en t= 5, se tiene un mínimo.

Para calcular la coordenada del punto mínimo, se sustituye t=5 en la función $V(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 40$

$$V(5) = (5)^3 - 9(5)^2 + 15(5) + 40$$

$$V(5) = 15$$

Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es creciente en un intervalo I…

Si para cualquier par de números: $x_1, x_2 \in I$ tal que:

$$x_1 < x_2$$

Implica que:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

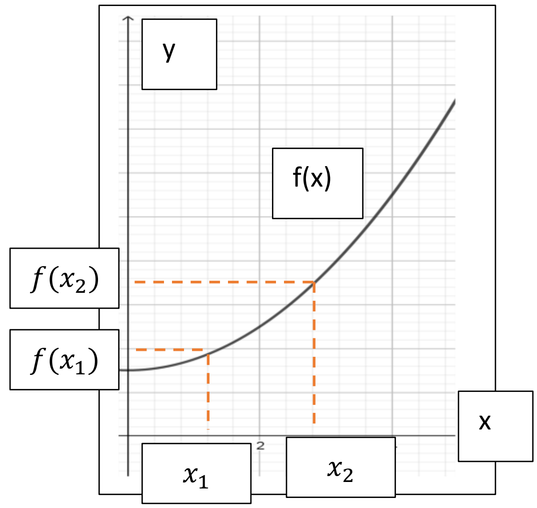


Figura 21. Gráfica

Una función f es decreciente en un intervalo I…

Si para cualquier par de números: $x_1, x_2 \in I$ tal que:

$$x_1 < x_2$$

Implica que:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

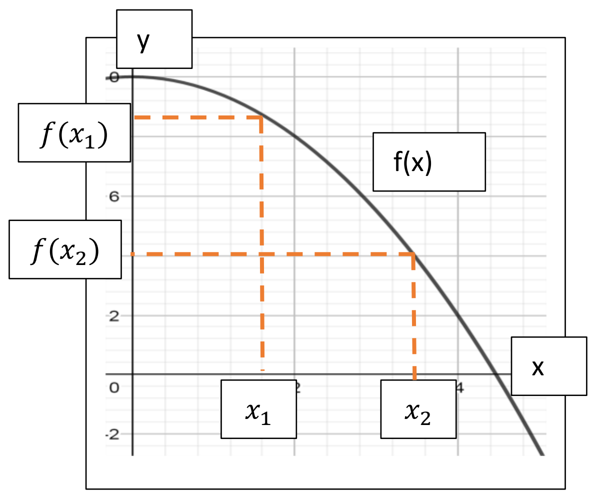


Figura 22. Gráfica

Realizando un procedimiento tabular tanto de la función como de su derivada, podemos estudiar el comportamiento de la gráfica de una función. Considerar el siguiente procedimiento.

Ejemplo 4

Función $\quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

Su derivada $\quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

Realizando un análisis tabular en el intervalo $-3 \le x \le 4$, se tiene que:

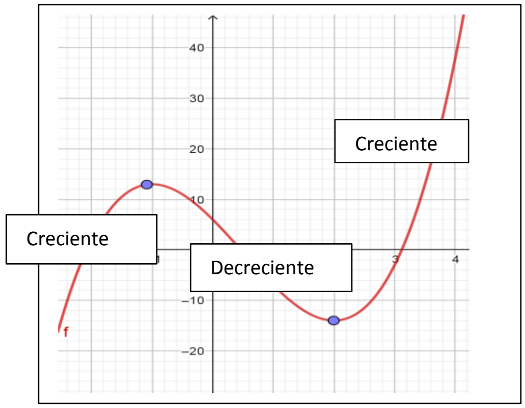
<table>
<tr><th>Procedimiento tabular</th><th>Gráfica de f(x)</th><th>Gráfica de f′(x)</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>f′(x)</th></tr>
<tr><td>-3</td><td>-39</td><td>60</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>2</td><td>24</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>13</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>-12</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-7</td><td>-12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-14</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-3</td><td>24</td></tr>
<tr><td>4</td><td>38</td><td>60</td></tr>
</table>
</td><td>


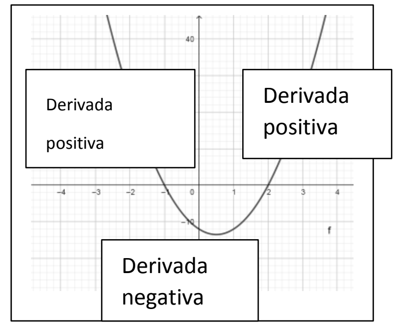
Figura 23. Gráfica
</td><td>


Figura 24. Gráfica
</td></tr>
<tr><td>Conclusiones</td><td>La función f(x) es:
Creciente en $(-\infty.-1)$
Decreciente en $(-1,2)$
Creciente en $(2,+\infty)$</td><td>La derivada f′(x) es:
Positiva en $(-\infty-1)$
Negativa en $(-1,2)$
Positiva en $(2,+\infty)$</td></tr>
</table>

Apoyándose en la interpretación geométrica de la derivada, se puede visualizar que una función es creciente si las rectas tangentes a la curva tienen pendiente positiva, y decreciente si las rectas tangentes tienen pendiente negativa

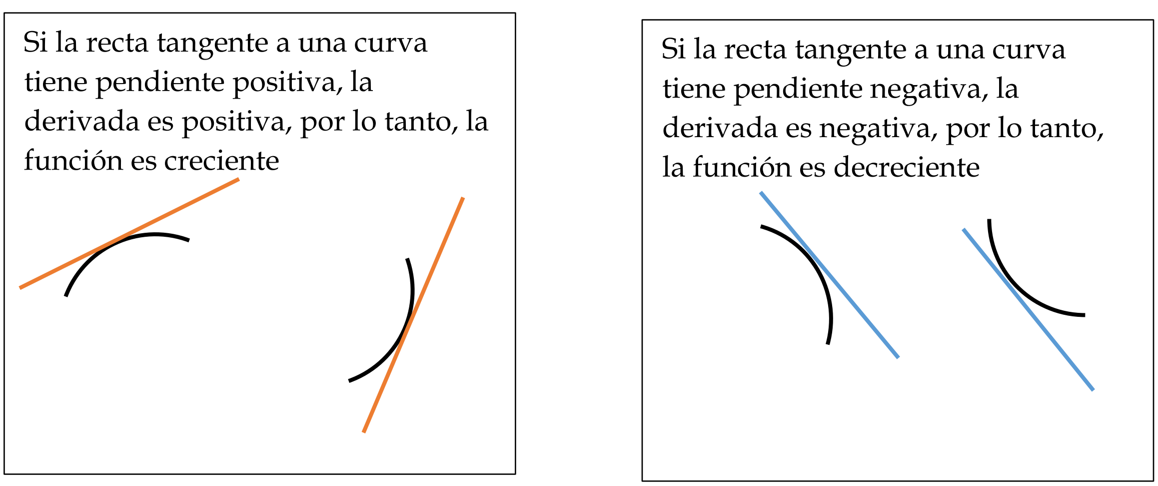


Figura 25. Gráfica

Criterio de crecimiento y decrecimiento de una función según su derivada

Si f(x) es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces:

Si $f'(x) > 0\ \ \forall x \in\ (a.b),\ \ f(x)\ es\ creciente$

Si $f'(x) < 0\ \ \forall x \in$ $(a.b),\ \ f(x)\ es\ decreciente$

Si $f'(x) = 0\ \ \forall x \in\ (a.b),\ \ f(x)\ es\ constante$

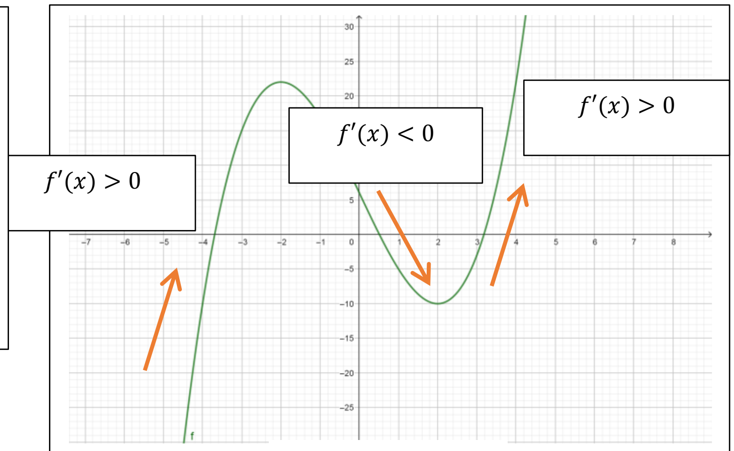


Figura 26. Gráfica

Pasos para determinar los intervalos donde una función es creciente y donde es decreciente

Si f(x) es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces:

1. Obtener f′(x)
2. Determinar los puntos críticos xi de f en (a, b)
3. Localizar los valores críticos xi sobre la recta numérica para definir los intervalos de interés
4. Obtener el signo de f′(x) para cada uno de los intervalos, evaluando un valor dentro de cada intervalo
5. Señalar si f(x) es creciente o decreciente, según su signo

Ejemplo 5

Indica los intervalos donde la función es creciente y decreciente de la función

$$\boldsymbol{f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 3}$$

Paso 1. Derivar la función

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

Paso 2. Determinar los valores críticos, igualando la derivada a cero y resolviendo la ecuación

$$-3x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\frac{-3x^2 + 6x + 9}{3} = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

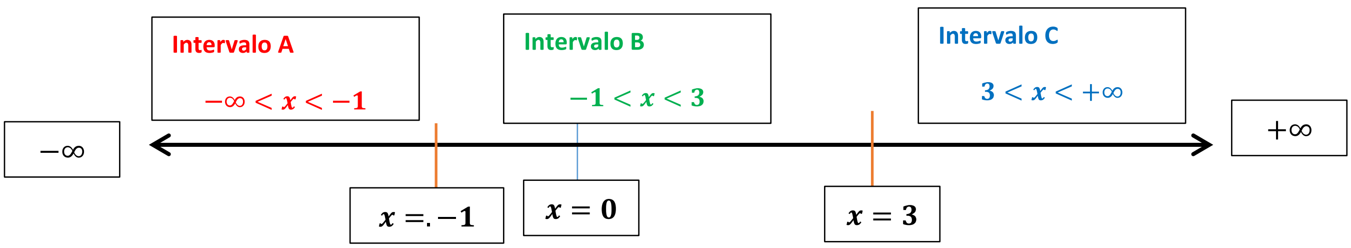
Resolver por factorización

$$(x-3)(x+1)=0$$

Valores críticos

$$\boldsymbol{x_1 = 3} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2 = -1}$$

Paso 3. Localizar los valores críticos xi sobre la recta numérica para definir los intervalos de interés



Pasos 4 y 5. Obtener el signo de la derivada f'(x) para cada uno de los intervalos, evaluando un valor dentro de cada intervalo y señalar si es creciente o decreciente

Intervalo A

$$-\infty < x < -1$$

Para **x = -2**

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 6x + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(-2) = -3(-2)^2 + 6(-2) + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(-2) = -15}$$

$$\boldsymbol{f'(-2) < 0 \quad \textit{decreciente}}$$

Intervalo B

$$\boldsymbol{-1 < x < 3}$$

Para **x = 0**

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 6x + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(0) = +9}$$

$$\boldsymbol{f'(0) > 0 \quad \textit{creciente}}$$

Intervalo C

$$\boldsymbol{3 < x < +\infty}$$

Para x = 4

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 6x + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(4) = -3(4)^2 + 6(4) + 9}$$

$$\boldsymbol{f'(4) = -15}$$

$$\boldsymbol{f'(4) < 0 \quad \textit{decreciente}}$$

Representación gráfica

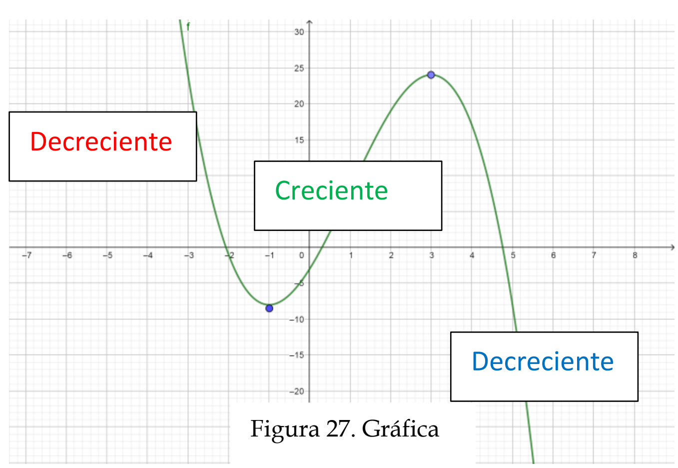


Figura 27. Gráfica

Concentrado de la evaluación de cada intervalo

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < +\infty$
Valor de x	$x = -2$	$x = 0$	$x = 4$
Signo	$f'(-2) = -15 < 0$	$f'(0) = 9 > 0$	$f'(4) = -15 < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

Ejemplo 6

Determinar los intervalos donde la función $f(x) = x^3$ *es creciente o decreciente*

Paso 1. Derivar la función

$$f'(x) = 3x^2$$

Paso 2. Determinar los valores críticos, igualando la derivada a cero y resolviendo la ecuación

$$3x^2 = 0$$

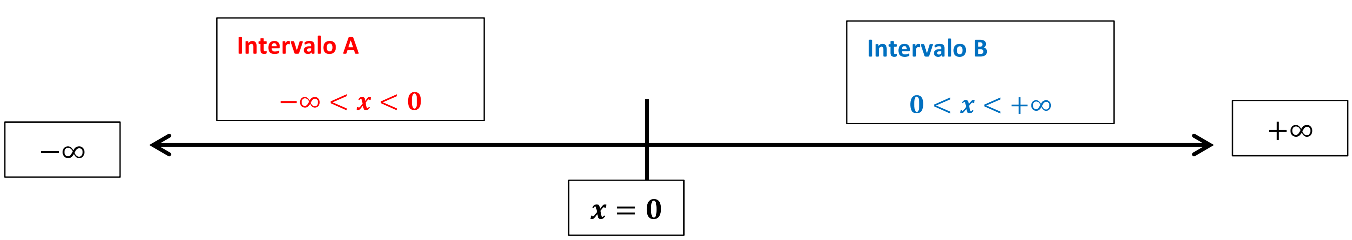
$$x^2 = \frac{0}{3} = 0$$

$$x = 0$$

Se tiene un solo valor crítico

$$x = 0$$

Paso 3. Localizar los valores críticos xi sobre la recta numérica para definir los intervalos de interés



Pasos 4 y 5. Obtener el signo de la derivada f′(x) para cada uno de los intervalos, evaluando un valor dentro de cada intervalo y señalar si la función es creciente o decreciente

Intervalo A	**Intervalo B**
$-\infty < x < 0$	$\mathbf{0 < x < +\infty}$
Para **x = -1**	Para **x = 1**
$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$	$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$
$\boldsymbol{f'(-1) = 3(-1)^2}$	$\boldsymbol{f'(1) = 3(1)^2}$
$\boldsymbol{f'(-1) = +3}$	$\boldsymbol{f'(1) = +3}$
$\boldsymbol{f'(-1) > 0 \quad creciente}$	$\boldsymbol{f'(0) > 0 \quad creciente}$

Concentrado de la evaluación de cada intervalo

Intervalo	$\boldsymbol{-\infty < x < 0}$	$\boldsymbol{0 < x < +\infty}$
Valor de x	$\boldsymbol{x = -1}$	$\boldsymbol{x = 1}$
Signo	$\boldsymbol{f'(-2) = +3 > 0}$	$\boldsymbol{f'(4) = +3 > 0}$
Conclusión	**Creciente**	**Creciente**

La función es creciente en todo su dominio

Representación gráfica

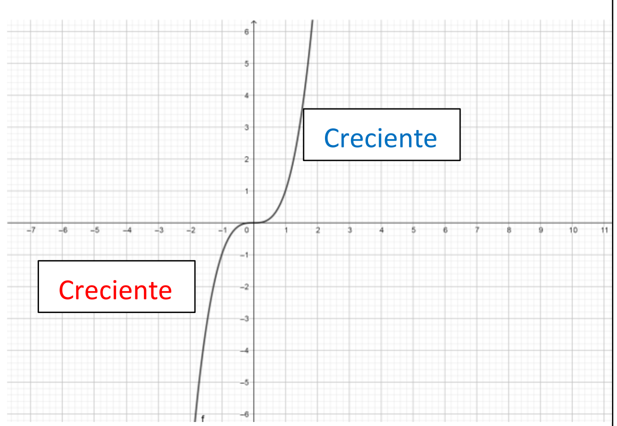
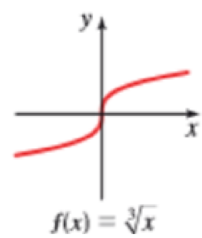


Figura 28. Gráfica

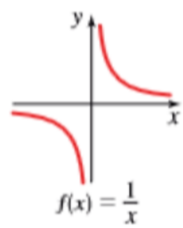
Actividad 3.1.4

1. Resuelve en tu libreta esta actividad
2. Observa las siguientes gráficas y remarca con rojo la parte que sea creciente y con azul la parte decreciente.

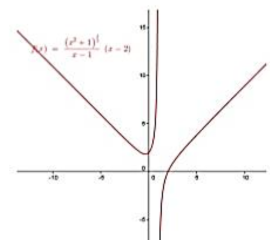
a)



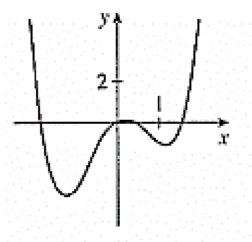
b)



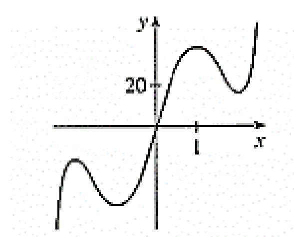
c)



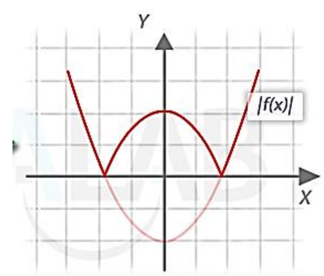
d)



e)



f)



3. Indica los intervalos donde la función es creciente y decreciente, y realiza su representación gráfica. Sigue el procedimiento de los ejemplos, considerando cada uno de los pasos

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

b) $f(x) = x^4 - 8x + 10$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

d) $f(x) = x^2\sqrt{x+5}$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 11

Criterio de la primera derivada

El criterio de la primera derivada nos permite calcular los valores máximo y mínimo de una función, tomando en cuenta que cuando la derivada f’(x) es positiva significa que la función es creciente y que cuando la derivada f’(x) es negativa, la función es decreciente

Procedimiento

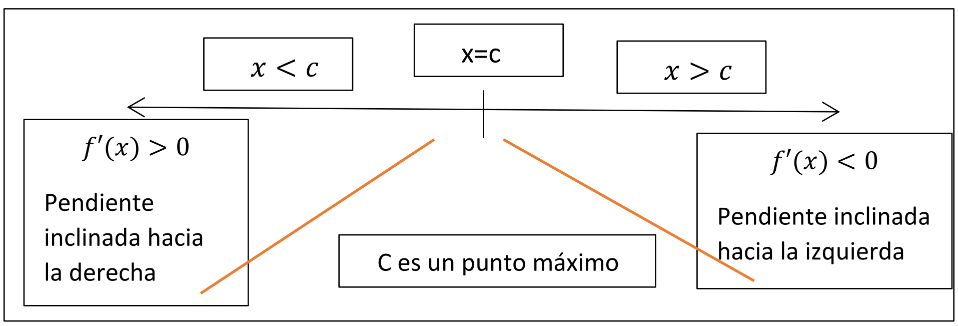
Paso 1. Calcular la derivada de la función f’(x)

Paso 2. Igualar la derivada a cero, para hallar los valores críticos

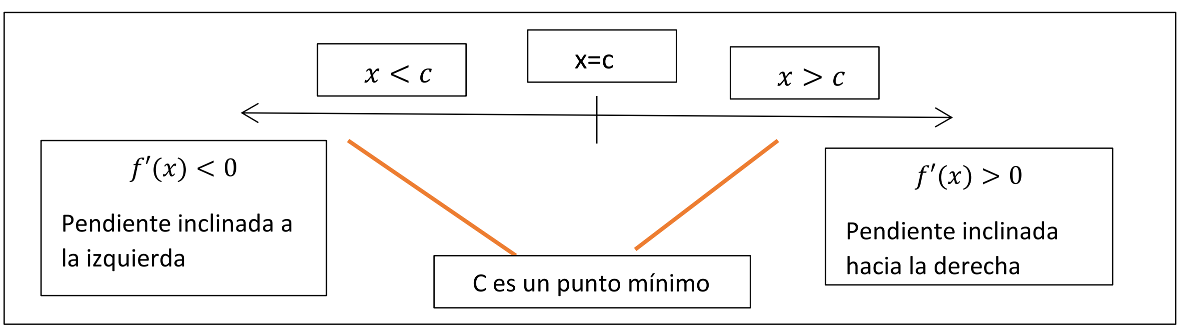
Paso 3. Evaluar a la derivada con valores antes y después de cada valor crítico

Paso 4. Determinar los valores máximos y mínimos considerando que:

- Si la derivada de la función es positiva antes del punto crítico y negativa después del valor crítico, se tiene entonces un máximo en la función



Si la derivada de la función es negativa antes del punto crítico y positiva después del valor crítico, se tiene entonces un valor mínimo



- Si antes y después del valor crítico, la derivada no cambia de signo, significa que se tiene un punto de inflexión

Paso 5. Sustituir los valores críticos en la función original para obtener las coordenadas
Paso 6. Bosquejar la gráfica

Ejemplo 7

Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Paso 1. Derivar la función

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Paso 2. Igualar la derivada a cero, para hallar los valores críticos

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Simplificar la derivada, dividiendo entre 3

$$\frac{3x^2 - 12x + 9}{3} = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolver por factorización

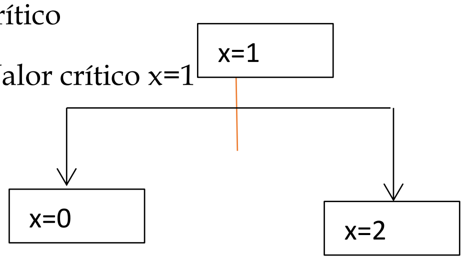
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Valores críticos

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$$

Paso 3. Evaluar a la derivada con valores antes y después de cada valor crítico

Valor crítico x=1



$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 9$$

$$f'(0) = +9$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9$$

$$f'(2) = -3$$

Continuación **paso 3**. Evaluar a la derivada con valores antes y después de cada valor crítico

Valor crítico x=3

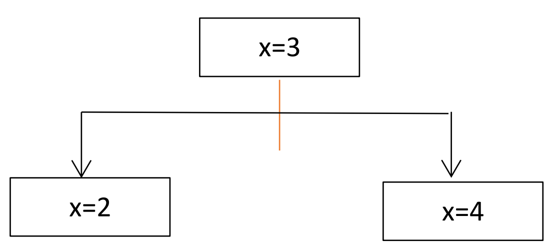
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9$$

$$f'(2) = -3$$

$$f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9$$

$$f'(2) = +9$$



Actividad 3.1.5

Instrucciones:

1. Realiza la siguiente actividad en tu libreta. Las gráficas se sugieren que de ser posible las realices en papel milimétrico, en caso de no contar con un graficador.

Determina las coordenadas de los puntos máximo y mínimo de las funciones dadas, aplicando el criterio de la primera derivada. Guíate del ejemplo y de los pasos

$f(x) = 2x - x^2$	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x - 20$	$f(x) = 3x^2 - x^3$
$f(x) = x^2 + 4x + 1$	$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$	$f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 12

Criterio de la segunda derivada

Pasos para encontrar los máximos y mínimos considerando el signo de la segunda derivada

Paso 1. Dada $y = f(x)$ calcular la primera derivada $f'(x)$

Paso 2. Igualar la primera derivada a cero ($f'(x) = 0$) y hallar los puntos críticos (x=c)

Paso 3. Calcular la segunda derivada $f''(x)$

Paso 4. Sustituir los valores críticos en la segunda derivada y se analizan los signos obtenidos, según las siguientes condiciones:

- Se tiene un máximo en x=c, si $f''(c) < 0$
- Se tiene un mínimo en x=c, si $f''(c) > 0$
- Se tiene un punto de inflexión en x=c, si $f''(c) = 0$

Paso 5. Para obtener las coordenadas de los puntos máximo y mínimo, se sustituyen los puntos críticos en la función original

Ejemplo 8

Calcular las coordenadas de los puntos máximo, mínimo y de inflexión de la función $f(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 10$, *aplicando el criterio de la segunda derivada*

Paso 1. Determinar la primera derivada

$f(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 10$

$$f'(x) = 5x^4 - 32x^3 + 48x^2$$

Paso 2. Igualar la primera derivada a cero, y obtener los valores críticos

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 - 32x^3 + 48x^2 = 0$$

Factorizando por factor común

$$x^2(5x^2 - 32x + 48) = 0$$

Despejando cada factor

$$x^2 = \frac{0}{(5x^2 - 32x + 48)}$$

$$x^2 = 0$$

$$(5x^2 - 32x + 48) = \frac{0}{x^2}$$

$$(5x^2 - 32x + 48) = 0$$

Resolviendo la cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 5, \quad b = -32, \quad c = 48$$

$$x = \frac{-(-32) \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(5)(48)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 960}}{10}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{32 \pm 8}{10}$$

$$x = \frac{32 + 8}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

$$x = \frac{32 - 8}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

Valores críticos

$$x = 0$$

$$x = \frac{12}{5}$$

$$x = 4$$

Paso 3. Calcular la segunda derivada

$$f'(x) = 5x^4 - 32x^3 + 48x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 96x$$

Paso 4. Sustituir los valores críticos en la segunda derivada

$$f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 96x$$

$$f''(0) = 20(0)^3 - 96(0)^2 + 96(0)$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''\left(\frac{12}{5}\right) = 20\left(\frac{12}{5}\right)^3 - 96\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 96\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$f''\left(\frac{12}{5}\right) = -46\frac{2}{25}$$

$$f''(4) = 20(4)^3 - 96(4)^2 + 96(4)$$

$$f''(0) = 128$$

Conclusiones

$f''(0) = 0$ Es un punto de inflexión

$f''\left(\frac{12}{5}\right) = -46\frac{2}{25} < 0$ Es un punto máximo

$f''(4) = 128 > 0$ Es un punto mínimo

Paso 5. Calcular las coordenadas, sustituyendo los valores críticos en la función original

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 10$$

$$f(0) = (0)^5 - 8(0)^4 + 16(0)^3 - 10$$

$$f(0) = -10$$

$$f\left(\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}\right)^5 - 8\left(\frac{12}{5}\right)^4 + 16\left(\frac{12}{5}\right)^3 - 10$$

$$f\left(\frac{12}{5}\right) = 25\frac{1.217}{3{,}125}$$

$$f(4) = (4)^5 - 8(4)^4 + 16(4)^3 - 10$$

$$f(4) = -10$$

Coordenadas

Punto de inflexión $(0, -10)$

Punto máximo $\left(\frac{12}{5}, -46\frac{1{,}217}{3{,}125}\frac{12}{5},\right)$

Punto mínimo $(4, -10)$

Concavidad y puntos de inflexión

El sentido geométrico que tiene el trazo de una función puede ser determinado con el concepto de concavidad. Si la gráfica se curva hacia arriba se dice que es cóncava positiva; si se curva hacia abajo, es cóncava negativa

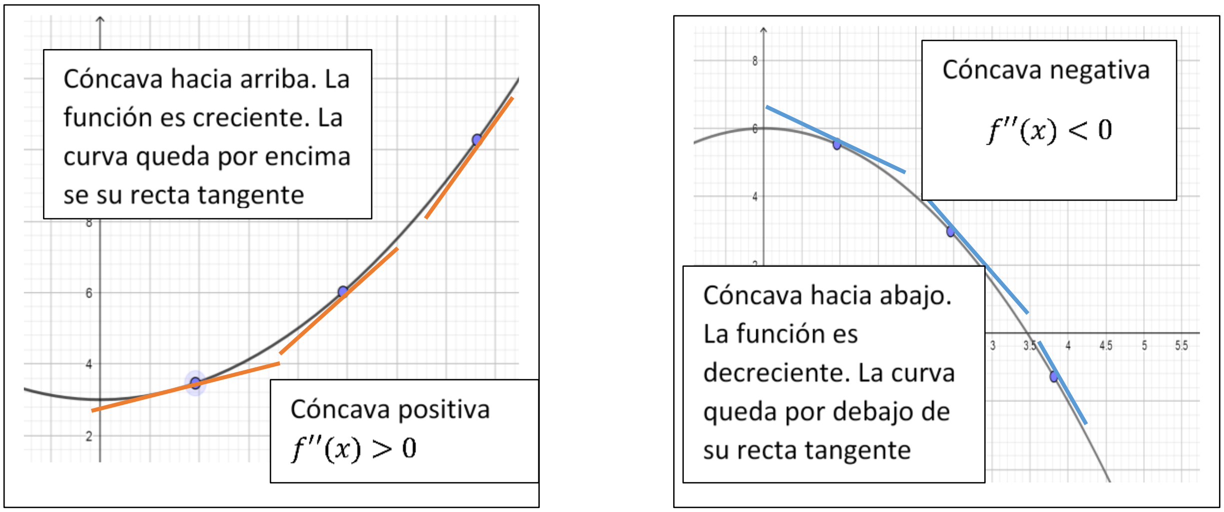


Figura 29. Gráfica

Criterios de concavidad

Si f es una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I, entonces:

- La gráfica de f es cóncava positiva (hacia arriba o convexa) para $f''(x) > 0$
- La gráfica de f es cóncava negativa (hacia abajo o cóncava) para $f''(x) < 0$

Puntos de inflexión

Un punto (c, f(c)) es un punto de inflexión de la función f si:

- $f''(c) = 0$
- $f''(c)$ $no\ está\ definida$

Los puntos de inflexión permiten analizar la concavidad de una función y sus puntos mínimos y máximos, empelando el criterio de la segunda derivada.

Paso 1. Calcular la primera derivada $f'(x)$

Paso 2. Calcular la segunda derivada $f''(x)$

Paso 3. Igualar la segunda derivada a cero y resolver la ecuación

Paso 4. Ubicar en una recta numérica los valores encontrados y determinar los intervalos formados

Paso 5. Evaluar cada intervalo, sustituyendo en la segunda derivada y determinar la concavidad y puntos de inflexión según el signo obtenido

Ejemplo 9

Aplicando el criterio de la segunda derivada, indica dónde la función dada es cóncava hacia arriba y hacia abajo.

Grafica la función $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Paso 1. Calcular la primera derivada

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{6}{x^2+3}}$$

$$f(x) = 6(x^2+3)^{-1}$$

$$f'(x) = 6(-1)(x^2+3)^{-2}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

Paso 2. Calcular la segunda derivada

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)(2)(x^2+3)(2x)}{((x^2+3)^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)[(x^2+3)(-12) + (48x)]}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Paso 3. Igualar la segunda derivada a cero y resolver la ecuación

$$f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = 0$$

$$36(x^2-1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Paso 4. Ubicar en una recta numérica los valores encontrados y determinar los intervalos formados

Intervalo A

$-\infty < x < -1$

Intervalo C

$\boldsymbol{1 < x < \infty}$

$x = -1$

$x = 1$

Intervalo B

$\boldsymbol{-1 < x < 1}$

Paso 5. Evaluar los intervalos en la segunda derivada

Intervalo A

$-\infty < x < -1$

Evaluar para x = -2

$$f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(-2) = \frac{36((-2)^2-1)}{((-2)^2+3)^3}$$

$$f''(-2) = \frac{108}{343}$$

Intervalo B

$-1 < x < 1$

Evaluar para x = 0

$$f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(0) = \frac{36((0)^2-1)}{((0)^2+3)^3}$$

$$f''(0) = -\frac{4}{3}$$

Intervalo C

$1 < x < +\infty$

Evaluar para x = 2

$$f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(2) = \frac{36((2)^2-1)}{((2)^2+3)^3}$$

$$f''(2) = \frac{108}{343}$$

Conclusiones

Intervalo	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Valor de x	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(0) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Gráfica

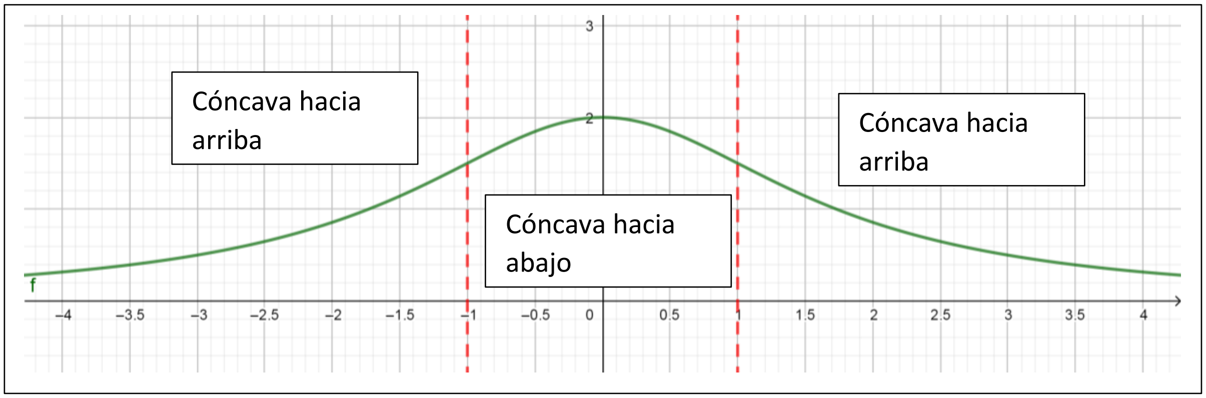


Figura 30. Gráfica ejemplo 9

Actividad 3.1.6

1. Realiza los siguientes ejercicios en tu libreta. Las gráficas las puedes realizar con algún graficador como el Geogebra si cuentas con él, en caso contrario la puedes hacer en papel milimétrico o directamente en tu libreta. Guíate de los procedimientos de los ejemplos.
2. Utiliza el criterio de la segunda derivada para calcular los puntos críticos y determina de qué tipo son, así como sus coordenadas, puntos de inflexión y su concavidad, señalando si es positiva o negativa

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
b) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 12x - 36$
c) $f(x) = x^4 - 4x^3$
d) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 24x + 10$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 13

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve de forma creativa problemas de optimización, aplicando los criterios de máximos y mínimos que le permitan la construcción de modelos que representen situaciones reales y /o hipotéticas de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de los pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- **Conocimiento (s):** Optimización.

Lectura previa

Optimización

A partir de aquí es necesario comprender cómo calcular los máximos y mínimos, para los siguientes problemas involucraremos fórmulas de perímetro, área y volumen en figuras o cuerpos geométricos, así como el teorema de Pitágoras entre otros.
Recomendaciones:

1. **Determina la función a maximizar o minimizar.** Se puede utilizar un modelo matemático cuando lo requiere.
2. **Si la función resultante tiene dos variables.** Datos suficientes para reducir la función a términos de a una variable
3. **Función simplificada.** Criterios aprendidos en máximos o mínimos.

Ejemplo 10

El dueño de un hotel quiere saber ¿cuánto podría ganar por renta de cada cuarto, con base a la siguiente función $\boldsymbol{I(x) = -4x^2 + 960x}$ *?*

a) ¿Cuál es el precio que maximiza las rentas?

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Derivamos la función dada.	$I'(x) = -4x + 960$
2	Igualamos a cero.	$-4x + 960 = 0$
3	Despejamos la variable (x)	$x = 120$

El precio de la renta es de 120 dólares.

b) ¿Cuál es este ingreso?

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Sustituir el valor de renta (x) en la función original.	$I(x) = -4x^2 + 960x$ $I(120) = -4(120)^2 + 960(120)$
2	Desarrollamos.	$I(120) = -57600 + 115200$
3	El ingreso máximo es de 57600.	$I(120) = 57600$

c) ¿Cuántas rentas debe realizar para alcanzar ingreso?

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	El ingreso es de 57600 y cada renta de 120 el número de rentas es…	$n = \dfrac{57600}{120}$
2	El número de rentas es de 480.	$n = 480$

Ejemplo 11

Unos alumnos desean vender cajas sorpresa el 14 de febrero. Para ello requieren elaborar cajas de cartón con las siguientes especificaciones:

- *Lados de 48 cm.*
- *En cada esquina de la hoja le recorta un cuadrado de x lado.*

Posteriormente las arman, calcula el volumen máximo.

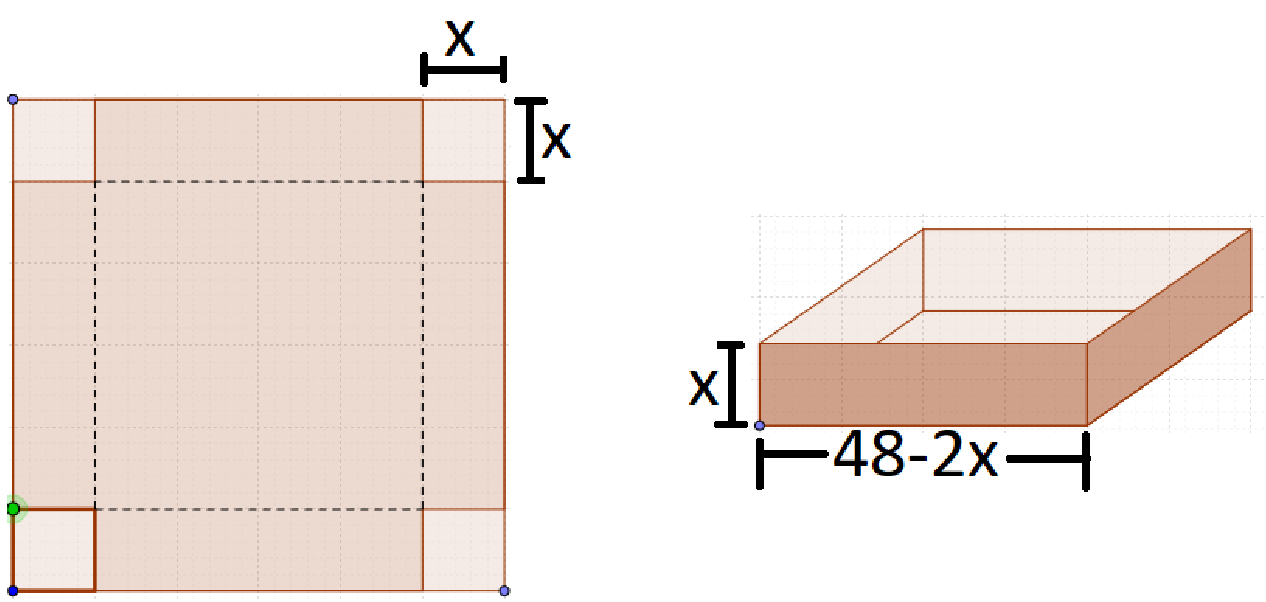


Figura 31. Caja

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Representa la fórmula.	$V(x) = x(48-2x)(48-2x)$
2	Desarrollamos la función.	$V(x) = 4x^3 - 192x^2 + 2304x$
3	Derivamos	$V'(x) = 12x^2 - 384x + 2304$
4 5	Buscamos el valor de x, con la formula general	$x_1 = 8$ $x_2 = 24$
6	Sustituimos los valores de x en la fórmula original para encontrar los máximos y mínimos	$\boldsymbol{V(x) = 4x^3 - 192x^2 + 2304x}$ $V(8) = 4(8)^3 - 192(8)^2 + 2304(8)$ $V(8) = 8192$ $V(24) = 4(24)^3 - 192(24)^2 + 2304(24)$ $V(24) = 0$
7	Conclusión: Volumen máximo $8192cm^3$	Máximo: P1(8,8192) Mínimo: P2(24,0)

Actividad 3.2

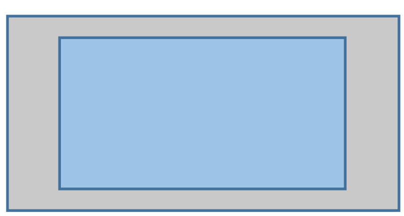
Instrucciones:

1. Lee cuidadosamente los siguientes problemas, identifica y contesta lo que se te pide, recuerda realizar tus procedimientos en una hoja aparte.

Problemas

1. Se calcula que el valor vehículos nuevos t meses después de salir al mercado durante el primer año viene dado por la función $v(t) = t^2 - 6t + 10$. Determina en qué mes conviene comprar, para adquirir un vehículo al precio más ventajoso.

2. Se requiere hacer una piscina de superficie de $72m^2$. La piscina requiere un andador (borde) que tenga 2 m en los lados cortos y 1 en los lados largos. Calcula las dimensiones de la piscina para que el área total de la piscina y el andador sea mínima.



3. Una compañía local de miel desea exportar miel en cajas rectangulares con base cuadrada, con un volumen de 12 litros. El costo del material del fondo y de las caras

laterales es de $5\, centavos\ por\ dm^2$, y el costo específicamente de la tapa es de $5\, centavos\ por\ dm^2$. Calcula las dimensiones de la caja para que el costo de su elaboración sea el mínimo.

4. Un arquitecto desea dividir su propiedad, para que el día de mañana pueda construir cuartos independientes el solo cuenta con un terreno de $3000\, m^2$, quiere comprar material para cercar y dividirlo en 5 partes iguales. Calcula Las dimensiones del terreno para que el material empleado sea el mínimo.

5. En un super mercado mandan hacer cajas rectangulares sin tapa (abierta por arriba) para llevar despensa de cartón reciclado. Calcula el volumen que puede elaborarse con $1200\, cm^2$ material.

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 14

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica las reglas de derivación para calcular la velocidad y aceleración de un móvil a partir de su posición en situaciones de su entorno, afrontando la frustración como parte de un proceso de aprendizaje.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de los pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- **Conocimiento (s):** Velocidad, Aceleración y Rapidez de un móvil.

Lectura previa

Velocidad, Aceleración y Rapidez de un móvil

Para entender este tema, hay que analizar lo siguiente: "La velocidad es la derivada de la posición y la aceleración es la segunda derivada de la misma", para entenderlo veamos la siguiente estructura.

Contesto:	Desarrollo:
• La **velocidad(v)** es el cambio de la **posición(p)** con respecto al **tiempo(t)**.	$v(t) = p'(t)$
• La **aceleración(a)** del móvil es el cambio de la **velocidad(v)** con respecto al **tiempo(t)**.	$a(t) = v'(t)$
• Es decir, la **aceleración(a)** es igual a la segunda derivada de la **posición(p)**.	$a(t) = p''(t)$

Ejemplo 12

*La **posición** de un vehículo se define con la siguiente fórmula* $\boldsymbol{p(t) = 5t^3 + 6t^2 - 7t + 9}$. *Calcula lo siguiente.*

a) La **posición** en t=5s:

<u>Solución:</u>

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Definimos la función original.	$p(t) = 5t^3 + 6t^2 - 7t + 9$
2	Sustituimos t por 5.	$p(5) = 5(5)^3 + 6(5)^2 - 7(5) + 9$
3	Desarrollamos y encontramos la posición.	$p(5) = 749m$

b) La **Velocidad** en t=5s:

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Definimos la función original.	$p(t) = 5t^3 + 6t^2 - 7t + 9$
2	Derivamos la función para encontrar la velocidad (primera derivada)	$v(t) = p'(t)$ $p'(t) = 15t^2 + 12t - 7$
3	Definimos la función de velocidad.	$v(t) = 15t^2 + 12t - 7$
4	Sustituimos t por 5.	$v(5) = 15(5)^2 + 12(5) - 7$
5	Desarrollamos y encontramos la Velocidad.	$v(5) = 428m/s$

c) La **Aceleración** en t=5s:

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Nos basamos en la función de la velocidad.	$v(t) = 15t^2 + 12t - 7$
2	Derivamos la función para encontrar la aceleración (segunda derivada)	$a(t) = v'(t)$ $v'(t) = 30t + 12$
3	Definimos la función de aceleración.	$a(t) = 30t + 12$
4	Sustituimos t por 5.	$a(5) = 30(5) + 12$
5	Desarrollamos y encontramos la aceleración.	$v(5) = 162m/s^2$

d) Calcula en que tiempo la velocidad es cero:

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Nos basamos en la función de la velocidad.	$v(t) = 15t^2 + 12t - 7$
2	Para conocer en que instante la velocidad es cero, debemos igualar a 0.	$0 = 15t^2 + 12t - 7$
3	Utilizamos la fórmula general para encontrar los valores del tiempo(t).	$t_1 = -1.19$ $t_2 = 0.39$

Actividad 3.3

Instrucciones:

1. Lee cuidadosamente los siguientes problemas de velocidad, aceleración y rapidez de un móvil. Recuerda identifica y contesta lo que se te pide, recuerda realizar tus procedimientos en una hoja aparte.

Problemas

1. Un automóvil se desplazamiento en una posición definida por $\mathrm{p}(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. Calcula y responde lo siguiente:
   a) Posición en t=4.
   b) Velocidad en t=4.
   c) Aceleración en t=4.
   d) ¿Está aumentando o disminuyendo su velocidad?

2. Una lancha se desplazamiento en una posición definida por $\mathrm{p}(t) = 3t^2 - t + 3$. Calcula y responde lo siguiente:
   a) Posición en t=4.
   b) Velocidad en t=4.
   c) Aceleración en t=4.

3. Un dron se desplazamiento en una posición definida por $\mathrm{p}(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 3$. Calcula y responde lo siguiente:
   a) En qué instante se detuvo.
   b) En qué instante su velocidad es 5 m/s.
   c) En qué instante su aceleración fue cero.

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 15

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica las reglas de derivación para calcular la velocidad y aceleración de un móvil a partir de su posición en situaciones de su entorno, afrontando la frustración como parte de un proceso de aprendizaje.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de los pasos contribuye al alcance de un objetivo. / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- **Conocimiento (s):** Regla de L'Hôpital.

Lectura previa

Regla de L'Hôpital.

La regla de L'Hôpital, nos permite calcular los limites indeterminados de las formas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$,por medio de una derivada (primera derivada, segunda, derivada, etc).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Ejemplo 13

Calcula lo siguiente.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sen\ x}$

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	**Sustituimos** directamente, para obtener la indeterminación.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sen\ x} = \frac{0}{sen\ 0} = \frac{0}{0}$
2	Aplicamos la regla de L'Hôpital. Aplicamos la primera **derivada**.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{sen\ x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cos\ x}$
3	Sustituimos en la primera derivada.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cos\ x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cos\ 0} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2senx}$

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	**Sustituimos** directamente, para obtener la indeterminación.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2senx} = \frac{e^0-1}{2sen0} = \frac{1-1}{2(0)} = \frac{0}{0}$
2	Aplicamos la regla de L'Hôpital. Aplicamos la primera **derivada**.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2senx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2cosx}$
3	Sustituimos en la primera derivada.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2cosx} = \frac{e^0}{2cos0} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x-3}{3x+7}$

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Aplicamos la regla de L'Hôpital. Aplicamos la primera **derivada**.	$\lim_{x \to \infty} \frac{4x-3}{3x+7} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{3}$
2	Sustituimos en la primera derivada.	$\lim_{x \to \infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

d) $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$

Solución:

Pasos	Instrucción	Desarrollo
1	Aplicamos la regla de L'Hôpital. Aplicamos la primera **derivada**.	$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}$
2	Aplicamos la segunda **derivada**.	$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x}$
3	Sustituimos en la segunda derivada.	$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$

Actividad 3.4

Instrucciones:

1. Calcula los siguientes límites. Identifica y contesta lo que se te pide, recuerda realizar tus procedimientos en una hoja aparte.

Ejercicios

1. $\lim_{x \to 0} x^3 e^{-3x}$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3-3x+2}{5x^3+6x-7}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos5x}{4x^2}$
4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{cos2x}{x-\frac{\pi}{2}}$
5. $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+4x}{e^x+2}$
6. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

Evaluación

- La actividad será evaluada de acuerdo al instrumento de evaluación 16

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

INSTRUMENTOS PARA EVALUACIÓN

Instrumento 1. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1 del bloque cero.

Conocimientos: Leyes de los exponentes	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: __________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Criterio de evaluación	Puntos asignados	Puntos obtenidos	
		Si	No
Reconoce los elementos de una potencia y comprende el significado de cada uno de ellos.			
Identifica y aplica correctamente la aplicación de las leyes involucradas en el producto y la división de potencias.			
Aplica correctamente las leyes de los exponentes para simplificar.			
Expresa correctamente un radical a potencia fraccionaria o viceversa.			
Comprende el significado de la potencia negativa y la aplica con facilidad para expresar potencias positivas y viceversa.			
Comprende el alcance de las leyes de los exponentes, como herramienta para operar con números y expresiones algebraicas.			
Entrega en tiempo y forma la actividad y muestra disposición y apertura a las críticas.			
Total			

Instrucciones: Llenar cada opción con ponderación asignada. Queda a criterio del docente colocar una fracción del total del puntaje asignado en caso de que se cumpla el criterio parcialmente. Sumar los puntajes obtenidos para obtener el total de la evaluación de la actividad.

Instrumento 2. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque cero.

Conocimientos: Productos notables	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.	➢ **Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
Nombre del alumno: ____________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ____________________	Fecha: ______________

Lista de cotejo

Criterio de evaluación	Puntos asignados	Puntos obtenidos	
		Si	No
Comprende el significado y la utilidad del uso de los productos notables en el desarrollo de las operaciones algebraicas.	2		
Relaciona correctamente la forma algebraica y verbal de cada producto notable.	2		
Identifica y aplica correctamente la regla o fórmula para desarrollar cada uno de los productos notables.	2		
Reconoce el nombre del resultado (producto) relacionado con el desarrollo del producto notable.	2		
Entrega en tiempo y forma la actividad y muestra disposición y apertura a las críticas.	2		
Total			

Instrucciones: Llenar cada opción con ponderación asignada. Queda a criterio del docente colocar una fracción del total del puntaje asignado en caso de que se cumpla el criterio parcialmente. Sumar los puntajes obtenidos para obtener el total de la evaluación de la actividad.

Instrumento 3. Lista de cotejo para evaluar la actividad 3 del bloque cero

Conocimientos: Factorización	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Propone procesos de solución identificando posibles errores.	**Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: __________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Criterio de evaluación	Puntos asignados	Puntos obtenidos	
		Si	No
Relaciona correctamente la forma de la expresión algebraica con el método correspondiente de factorización.	2		
Aplica correctamente la factorización por término común.	2		
Factoriza correctamente los trinomios según su forma.	2		
Asocia correctamente las fórmulas de factorización con la expresión algebraica a factorizar.	2		
Aplica correctamente las fórmulas especiales para la factorización.	2		
Total			

Instrucciones: Llenar cada opción con ponderación asignada. Queda a criterio del docente colocar una fracción del total del puntaje asignado en caso de que se cumpla el criterio parcialmente. Sumar los puntajes obtenidos para obtener el total de la evaluación de la actividad.

Instrumento 4. Lista de cotejo para evaluar la actividad 4 del bloque cero.

Conocimientos: Racionalización.	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Propone procesos de solución identificando posibles errores.	**Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Criterio de evaluación	Puntos asignados	Puntos obtenidos	
		Si	No
Comprende el objetivo de la racionalización en expresiones algebraicas.	2		
Determina correctamente el factor radical y realiza correctamente la racionalización de denominadores que contienen un solo radical con índice diferente de dos.	2		
Determina correctamente el conjugado del denominador y racionaliza correctamente las expresiones que contiene uno o más radicales.	2		
Aplica correctamente la doble racionalización cuando los radicales se presentan tanto en el numerador como en el denominador.	2		
Entrega en tiempo y forma, con limpieza y ordenado, los ejercicios propuestos.	2		
Total			

Instrucciones: Llenar cada opción con ponderación asignada. Queda a criterio del docente colocar una fracción del total del puntaje asignado en caso de que se cumpla el criterio parcialmente. Sumar los puntajes obtenidos para obtener el total de la evaluación de la actividad.

Instrumento 5. Lista de cotejo para evaluar la actividad 5 del bloque cero.

Conocimientos: Simplificación de expresiones racionales.	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Propone procesos de solución identificando posibles errores.	**Atributos:** 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Criterio de evaluación	Puntos asignados	Puntos obtenidos	
		Si	No
Comprende el objetivo y el significado del proceso de la simplificar una expresión algebraica.	2		
Identifica correctamente el o los procesos de factorización involucrados en la simplificación de fracciones algebraicas.	3		
Racionaliza correctamente fracciones algebraicas.	3		
Entrega en tiempo y forma, con limpieza y ordenado los ejercicios propuestos.	2		
Total			

Instrucciones: Llenar cada opción con ponderación asignada. Queda a criterio del docente colocar una fracción del total del puntaje asignado en caso de que se cumpla el criterio parcialmente. Sumar los puntajes obtenidos para obtener el total de la evaluación de la actividad.

Instrumento 6. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1 del bloque uno.

Conocimientos: Antecedentes y aplicaciones del cálculo	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Explica la importancia del cálculo, por medio del conocimiento de sus antecedentes y aplicaciones reflexionando sobre su relevancia en procesos actuales de su entorno	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades/5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo/5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN DE ESTE INSTRUMENTO. Solicite al alumno la actividad 1. **"línea del tiempo de historia y nacimiento del cálculo".** Verifique que cubra las características señaladas abajo y marque con una X el registro del cumplimiento correspondiente. En caso de ser necesario hay un espacio para observaciones.

INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
PUNTUALIDAD (valor 2 puntos) (la línea del tiempo fue recibida en la fecha especificada).			
PRESENTACIÓN (valor 2 puntos) (fue presentada limpia, ordenada y de manera adecuada).			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 2 puntos) (sus contenidos abordaron el tema de una manera coherente y cronológica).			
CREATIVIDAD (valor 2 puntos) (utilizaron materiales originales, colores y elementos visuales de manera adecuada).			
PRESENTACIÓN (valor 2 puntos) (Contiene al menos 8 a 10 eventos relacionados con el tema e Incluye colores e imágenes de manera adecuada).			

Notas:
- Los números entre paréntesis en los reactivos, señalan la ponderación que tiene cada reactivo, respecto del instrumento.
- El número después del nombre del instrumento señala el valor del cuestionario, en la calificación, en relación al total de instrumentos que se aplicarán para evaluar esta unidad temática.
- La cantidad de SI obtenidos, se multiplica por .3 y el resultado es el porcentaje obtenido en tu actividad 1 *del bloque*

Instrumento 7. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque uno.

Conocimientos: Concepto de limite	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Explica la importancia del cálculo, por medio del conocimiento de sus antecedentes y aplicaciones reflexionando sobre su relevancia en procesos actuales de su entorno	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades/5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
Nombre del alumno: ____________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ____________________	Fecha: ______________

Lista de cotejo

INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN DE ESTE INSTRUMENTO. Solicite al alumno la actividad 2. Verifique que cubra las características señaladas abajo y marque con una X el registro del cumplimiento correspondiente. En caso de ser necesario hay un espacio para observaciones.

INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
PUNTUALIDAD (valor 2 puntos) La actividad fue recibida en la fecha especificada			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 1 puntos) Identifica la aproximación al límite de la sucesión.			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 1 puntos) En el ejercicio 1 determina los valores desde n= 4 hasta n=20			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 2 puntos) Determina correctamente el valor de cada límite lateral de las funciones establecidas en el ejercicio 2			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 2 puntos) Determina el límite de la función en un punto (conclusión) según los valores de los límites laterales del ejercicio 2			
CONTENIDO Y COHERENCIA (valor 2 puntos) Escribe correctamente los límites laterales y la conclusión			

Notas:

- Los números entre paréntesis en los reactivos, señalan la ponderación que tiene cada reactivo, respecto del instrumento.

- El número después del nombre del instrumento señala el valor del cuestionario, en la calificación, en relación al total de instrumentos que se aplicarán para evaluar esta unidad temática.

- La cantidad de SI obtenidos, se suman y el resultado es el porcentaje obtenido en tu actividad 2.

Instrumento 8. Lista de cotejo para evaluar la actividad 3.1, 3.2 y 3.3 del bloque uno.

Conocimientos: Propiedades de los límites	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Calcula límites de funciones algebraicas y trascendentes, a través del análisis de situaciones de su contexto para la construcción de nuevos conocimientos.	**Atributos:** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades/4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INSTRUCCIONES DE APLICACIÓN DE ESTE INSTRUMENTO. Solicite al alumno la actividad 3. Verifique que cubra las características señaladas abajo y marque con una X el registro del cumplimiento correspondiente. En caso de ser necesario hay un espacio para observaciones.

INDICADORES	SI	NO	OBSERVACIONES
PRESENTACIÓN (Valor 1 pt) Su trabajo está limpio, tiene orden, se lee y entiende perfectamente			
PUNTUALIDAD (valor 2 puntos) los ejercicios fueron recibidos en la fecha especificada			
CONTENIDO Y COHERENCIA (2 puntos) Aplica correctamente las propiedades de los límites			
CONTENIDO Y COHERENCIA (3 puntos) identifica de forma analítica los distintos tipos de límites			
CONTENIDO Y COHERENCIA (Valor 2 punto) Tiene un 90-100 % de los resultados de manera correctos.			

Notas:
- Los números entre paréntesis en los reactivos, señalan la ponderación que tiene cada reactivo, respecto del instrumento.
- El número después del nombre del instrumento señala el valor del cuestionario, en la calificación, en relación al total de instrumentos que se aplicarán para evaluar esta unidad temática.
- La cantidad de SI obtenidos, se suman y el resultado es el porcentaje obtenido en tu actividad 3.

Instrumento 9. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1,2 y 3 del bloque dos.

Conocimientos: Derivada por definición de funciones polinómicas (regla de los 4 pasos). Derivadas de funciones algebraicas y trascendentes.	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Emplea la regla de los 4 pasos para obtener la derivada de una función. Aplica fórmulas o teoremas de derivación para la solución de funciones algebraicas y trascendentes	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Para obtener la calificación final se multiplica el puntaje de la columna ejecución por la ponderación que considere el evaluador y se coloca en la columna total, posteriormente se realiza la sumatoria.

Solución de ejercicios			
Criterios de evaluación	Ejecución	Ponderación general	Total ________%
• Forma			
Entrega la actividad en la fecha establecida		10	
Limpieza en la entrega de la actividad		10	
• Contenido			
Aplica el o los conceptos matemáticos de acuerdo al tema		30	
Formula los procedimientos adecuados para la solución del ejercicio		30	
Halla y escribe la solución correcta para cada uno de los ejercicios		20	
Total		100	

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 10. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1.3 del bloque tres.

Conocimientos: Máximos, mínimos y puntos de inflexión	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INDICADOR	NIVEL DE COMPETENCIA		
	COMPETENTE	MEDIANAMENTE COMPETENTE	INSUFICIENTE
Calcula de forma correcta la derivada de cada función			
Obtiene de forma correcta los puntos críticos de cada función			
Realiza las evaluaciones en la función de cada uno de los puntos críticos			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados indicando cuáles son los extremos relativos de cada función			
Calcula correctamente las coordenadas de los extremos relativos			
Realiza la representación gráfica de cada función de forma correcta, ubicando los extremos relativos			
Realiza todos los procedimientos de manera clara y ordenada			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 11. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1.4 del bloque tres.

Conocimientos: Máximos, mínimos y puntos de inflexión	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INDICADOR	NIVEL DE COMPETENCIA		
	COMPETENTE	MEDIANAMENTE COMPETENTE	INSUFICIENTE
Calcula de forma correcta la derivada de cada función			
Obtiene de forma correcta los puntos críticos de cada función			
Ubica en la recta numérica los puntos críticos y señala los intervalos a analizar			
Realiza las evaluaciones en la función de cada uno de los valores de x de cada intervalo			
Interpreta correctamente el signo obtenido en la derivada			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados señalando los intervalos donde la función es creciente y decreciente			
Realiza la representación gráfica de cada función de forma correcta, ubicando los intervalos donde la función es creciente y decreciente			
Realiza todos los procedimientos de manera clara y ordenada			

Observaciones:
____
____

Instrumento 12. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1.5 del bloque tres.

Conocimientos: Máximos, mínimos y puntos de inflexión	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INDICADOR	NIVEL DE COMPETENCIA		
	COMPETENTE	MEDIANAMENTE COMPETENTE	INSUFICIENTE
Calcula de forma correcta la derivada de cada función			
Obtiene de forma correcta los puntos críticos de cada función			
Evalúa la derivada con valores menores y mayores que los puntos críticos			
Interpreta correctamente el signo obtenido en la derivada para determinar los valores máximo y mínimo			
Determina correctamente las coordenadas de los puntos máximo y mínimo			
Realiza la representación gráfica de cada función de forma correcta, ubicando los puntos máximo y mínimo			
Realiza todos los procedimientos de manera clara y ordenada			

Observaciones:
____
____

Instrumento 13. Lista de cotejo para evaluar la actividad 1.6 del bloque tres.

Conocimientos: Máximos, mínimos y puntos de inflexión	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Esboza de manera metódica y organizada la gráfica de una función a partir del cálculo de sus máximos, mínimos y puntos de inflexión para representar situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

INDICADOR	NIVEL DE COMPETENCIA		
	COMPETENTE	MEDIANAMENTE COMPETENTE	INSUFICIENTE
Calcula de forma correcta la derivada de cada función			
Obtiene de forma correcta los puntos críticos de cada función			
Ubica en la recta numérica los puntos críticos y señala los intervalos a analizar			
Realiza las evaluaciones en la función de cada uno de los valores de x de cada intervalo			
Interpreta correctamente el signo obtenido en la segunda derivada			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados señalando los intervalos donde la función cóncava positiva o negativa			
Determina correctamente las coordenadas de los puntos máximo, mínimo y de inflexión			
Realiza la representación gráfica de cada función de forma correcta, ubicando los intervalos de la concavidad			
Realiza todos los procedimientos de manera clara y ordenada			

Instrumento 14. Lista de cotejo para evaluar la actividad 2 del bloque tres.

Conocimientos: Optimización	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Resuelve de forma creativa problemas de optimización, aplicando los criterios de máximos y mínimos que le permitan la construcción de modelos que representen situaciones reales y /o hipotéticas de su contexto.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ___________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: __________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Indicador	Nivel de competencia		
	Competente	**Medianamente Competente**	**Insuficiente**
Interpreta correctamente el problema.			
Obtiene de forma correcta los puntos máximos y mínimos.			
Realiza las evaluaciones en cada función para los puntos de inflexión.			
Realiza todos los procesos de manera clara y ordenada.			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados indicando cuáles son los máximos o mínimos de cada problema.			

Observaciones:
____
____

Instrumento 15. Lista de cotejo para evaluar la actividad 3 del bloque tres.

Conocimientos: Velocidad, Aceleración y Rapidez de un móvil.	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Aplica las reglas de derivación para calcular la velocidad y aceleración de un móvil a partir de su posición en situaciones de su entorno, afrontando la frustración como parte de un proceso de aprendizaje.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Indicador	Nivel de competencia		
	Competente	**Medianamente Competente**	**Insuficiente**
Interpreta correctamente el problema.			
Reconoce los criterios de la primera derivada como velocidad y segunda derivada como aceleración.			
Asocia distintas variables para generar modelos matemáticos.			
Realiza las evaluaciones en cada función para encontrar la posición, velocidad y aceleración.			
Realiza todos los procesos de manera clara y ordenada.			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados indicando cuáles son los máximos o mínimos de cada problema.			

Observaciones:
____
____

Instrumento 16. Lista de cotejo para evaluar la actividad 4 del bloque tres.

Conocimientos: Regla de L'Hôpital.	**Asignatura:** Cálculo Diferencial
Aprendizaje esperado: Aplica las reglas de derivación para calcular la velocidad y aceleración de un móvil a partir de su posición en situaciones de su entorno, afrontando la frustración como parte de un proceso de aprendizaje.	**Atributos:** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo / 7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana
Nombre del alumno: ____________________________________	Semestre y Grupo: ________
Nombre del docente: ___________________________________	Fecha: __________________

Lista de cotejo

Indicador	Nivel de competencia		
	Competente	**Medianamente Competente**	**Insuficiente**
Interpreta correctamente el problema.			
Reconoce los criterios de la primera derivada como velocidad y segunda derivada como límites.			
Asocia distintas variables para generar modelos matemáticos.			
Realiza las evaluaciones en cada función para encontrar los límites.			
Realiza todos los procesos de manera clara y ordenada.			
Desarrolla una conclusión con base en los resultados indicando cuales son los límites.			

Observaciones:
____
____

ANEXOS

Anexo 1. Signos de agrupación y jerarquía de las operaciones.

LEYES DE LOS SIGNOS			
SUMA Y RESTA	$(+)+(+)=+$	Sumar y colocar el signo +	Signos iguales, se suma y se coloca el mismo signo.
	$(-)+(-)=-$	Sumar y colocar el signo −	
	$(+)+(-)$	Restar y colocar el signo del mayor.	Signos diferentes, se resta y se coloca el signo del mayor.

MULTIPLICACIÓN		DIVISIÓN	
$(+)\cdot(+)=+$	Signos iguales, positivo.	$\frac{(+)}{(+)}=+$	Signos iguales, positivo.
$(-)\cdot(-)=-$		$\frac{(-)}{(-)}=+$	
$(+)\cdot(-)=-$	Signos diferentes, negativo.	$\frac{(+)}{(-)}=-$	Signos diferentes, negativo.
$(-)\cdot(+)=-$		$\frac{(-)}{(+)}=-$	

SIGNOS DE AGRUPACIÓN Y JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES		
PEMDAS	Ejemplo	$5(3-9)^2 \div 7+5-10$
Paréntesis, corchetes o llaves:	$(\quad);[\quad];\{\quad\}$	$5(-6)^2 \div 7+5-10$
Exponentes y raíces:	$a^n;\ \sqrt[n]{a}$	$5(36) \div 7+5-10$
Multiplicación	$\times$	$180 \div 3+5-10$
División	$\div$	$60+5-10$
Adición o restas:	$+$	$65-10$
Sustracción	$-$	55

Si en una misma operación hay más de una multiplicación o división, se procede a resolverlas de izquierda derecha.

Anexo 2. Leyes de los logaritmos.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS	1. DEFINICIÓN	2. EJEMPLOS	
	La función logarítmica con base a, denotada por log_a, está definida por: $$\log_a x = y \iff a^y = x$$ Donde a siempre es positivo y diferente de 1.	$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ $y = \ln(x+3) \Leftrightarrow e^y = x + 3$ $y = \log(x^2-1) \Leftrightarrow 10^y = x^2 - 1$	
		3. TIPOS DE LOGARITMOS	
		Común	Natural
• La base del logaritmo común si no aparece indicado se sobreentiende que es 10. • La base del logaritmo natural es el número e		$y = \log_a x$	$y = lnx$

4. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$; sean A,B y N números reales con A> $0\ y\ B > 0$

I	$\log_a 1 = 0$	IV	$log_a \left(\frac{A}{B}\right) = log_a A - log_a B$
II	$\log_a a = 1$	V	$log_a A^N = N\, log_a A$
III	$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	VI	$log_a \sqrt[N]{A} = \frac{1}{N} log_a A$

5. APLICACIONES

Evaluando logaritmos	$\log_4 2 + \log_4 32 \overset{III}{\triangleq} \log_4(2 \cdot 32) \overset{DEF}{\triangleq} \log_4 64 = 3$

Expansión de expresiones logarítmicas	Combinación de expresiones logarítmicas
$\ln\left(\frac{2(x+1)}{\sqrt[3]{3x-2}}\right) \overset{IV}{\triangleq} \ln 2(x+1) - \ln \sqrt[3]{3x-2}$ $\overset{III\ y\ VI}{\triangleq} \ln 2 + \ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(3x-2$	$3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) \overset{V}{\triangleq} \log x^3 + \log(x+1)^{1/2}$ $\overset{III}{\triangleq} log\left[x^3(x+1)^{1/2}\right]$

- Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de los Exponentes dan lugar a las Propiedades de los Logaritmos.
- El proceso de expansión de expresión logarítmica implica escribir el logaritmo de un producto o cociente como la suma o diferencia de logaritmos.
- La combinación de expresiones logarítmicas, significa invertir el proceso de expansión; es decir, las sumas o diferencias de los logaritmos se expresan como un solo logaritmo.

Anexo 3. Identidades trigonométricas

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN	Una identidad trigonométrica es una igualdad que permite expresar una expresión trigonométrica en términos de otras.	UTILIDAD	Se utilizan para simplificar expresiones que involucran expresiones trigonométricas.

TABLA DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

RECÍPROCAS			DE COCIENTE	
1) $sen\,\theta \csc\theta = 1$	2) $\cos\theta \sec\theta = 1$	3) $\tan\theta \cot\theta = 1$	Tangente y cotangente en términos de seno y coseno.	
4) $sen\,\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	5) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	6) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	10) $tan\,\theta = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$	11) $cot\,\theta = \frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}$
7) $csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$	8) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	9) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$		

PITAGÓRICAS

12) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$	13) $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$	14) $cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$
15) $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$	16) $tan^2\theta = sec^2\theta - 1$	17) $cot^2\theta = csc^2\theta - 1$
18) $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$	19) $sec^2\theta - tan^2\theta = 1$	20) $csc^2\theta - cot^2\theta = 1$

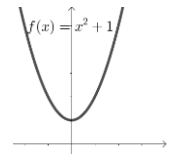
SUMA	DIFERENCIA
21) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha\, sen\,\beta$	22) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\, sen\,\beta$
23) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	24) $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

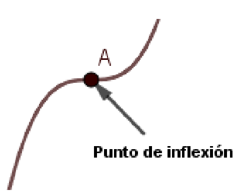
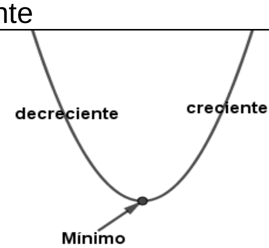
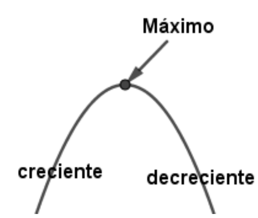
ÁNGULO DOBLE		DE LA MITAD DEL ÁNGULO	
25) $sen\,2\theta = 2sen\,\theta\cos\theta$	26) $\cos 2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$	30) $sen\,\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	31) $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$
27) $\cos 2\theta = 2cos^2\theta - 1$	28) $\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta$	32) $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	33) $\tan\frac{x}{2} = \frac{sen\,\theta}{1+\cos\theta}$
29) $\tan\theta = \frac{2\tan\theta}{1-tan^2\theta}$		34) $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos\theta}{sen\,\theta}$	

TRANSFORMACIONES DE SUMAS O RESTAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS A PRODUCTOS

35) $sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	35) $sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
36) $cos\,\alpha + \cos\beta = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	36) $cos\,\alpha - \cos\beta = -2\,sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Anexo 4. Funciones

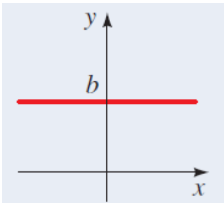
<table>
<tr><td rowspan="3">DEFINICIÓN</td><td rowspan="3">Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto llamado B.</td><td colspan="4">REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>Algebraica</td><td>Gráfica</td><td>Tabla</td></tr>
<tr><td>“Elevar al cuadrado x y luego sumar 1”</td><td>$f(x) = x^2 + 1$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$f(x)$</td></tr><tr><td>-2</td><td>5</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">EVALUACIÓN DE FUNCIONES</td><td colspan="4">EJEMPLO SI $f(x) = 3x^2 + x - 5$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Para evaluar una función, se sustituye x por algún número, símbolo o expresión algebraica.</td><td colspan="4">Cuando $x = -2$
$f(-2) = 3(-2)^2 + (-2) - 5 = 3(4) - 2 - 5 = 5$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Cuando $x = x + \Delta x$
$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - 5$
$= 3[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + x + \Delta x - 5$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">ASPECTOS GENERALES DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES</td></tr>
<tr><td>Ceros</td><td>Intersección con el eje Y</td><td>Crecimiento</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Son las intersecciones de la curva con el eje X. Se determina igualando a cero la función y resolviendo: $f(x) = 0$</td><td rowspan="2">Se determinan evaluando la función en $x = 0$ y resolviendo.</td><td>Creciente si al aumentar x, el valor de la función también aumenta</td></tr>
<tr><td>Decreciente si al aumentar x, el valor de la función disminuye.</td></tr>
<tr><td>Punto de inflexión</td><td>Mínimo local</td><td>Máximo local</td></tr>
<tr><td>Es el punto donde la curva cambia de dirección en el mismo intervalo de crecimiento.</td><td>Es el punto donde la función cambia de decreciente a creciente</td><td>Es el punto donde la función cambia de creciente a decreciente</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

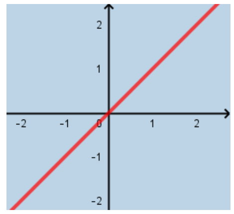
Anexo 5. Comportamiento gráfico de algunas funciones[24]

FUNCIONES LINEALES

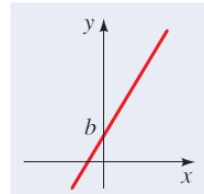
Constante $f(x) = b$



Identidad $f(x) = x$

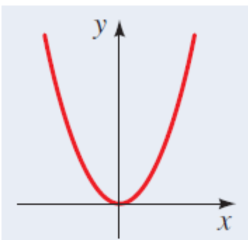


$f(x) = mx + b$

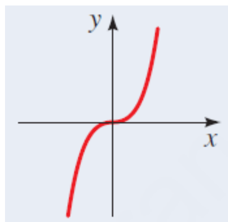


FUNCIONES POTENCIA

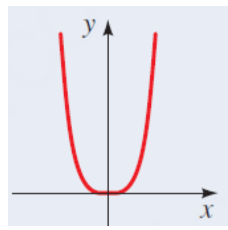
$f(x) = x^2$



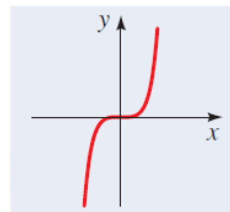
$f(x) = x^3$



$f(x) = x^4$

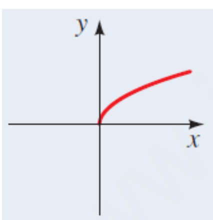


$f(x) = x^5$

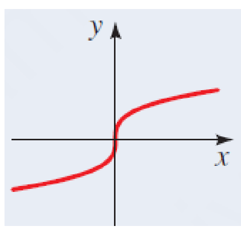


FUNCIONES RAÍZ

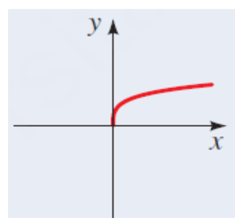
$f(x) = \sqrt{x}$



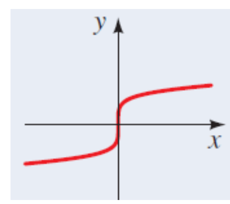
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$f(x) = \sqrt[4]{x}$

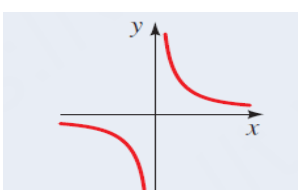


$f(x) = \sqrt[5]{x}$

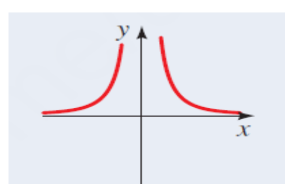


FUNCIONES RECÍPROCAS

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

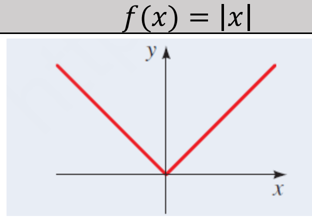


$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



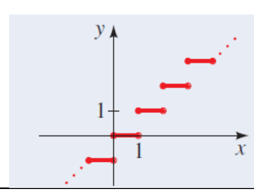
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

$f(x) = |x|$



FUNCIÓN ENTERO MAYOR

$f(x) = [\![x]\!]$



Anexo 6. Reglas o fórmulas de derivación

[24] Imágenes tomadas del libro de Precálculo Matemáticas para el Cálculo. James Stewart, Lothar Redlin, Saleen Watson. Séptima edición. 2017.

Algebraicas	Trigonométricas
En las siguientes fórmulas u, v y w son funciones diferenciables de x, y c y m son constantes.	$\frac{d}{dx}\text{sen u} = \cos u\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}\cos u = -\text{sen}\, u\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\frac{d}{dx}\tan u = sec^2\, u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \cdots$	$\frac{d}{dx}\cot u = -csc^2\, u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$	$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\ tan\, u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$	$\csc u = -\csc u\ \cot u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}(u), c \neq 0$	
$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c\frac{d}{dx}(\frac{1}{u})$	
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$	
$\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$	
$\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$	
Trigonométricas inversas	**Exponenciales y logarítmicas**
$\frac{d}{dx}\text{arcsen u} = -\frac{1}{\sqrt{1 - U^2}}\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}a^u = a^u\ \ln a\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\text{arccos}\, u = -\frac{1}{\sqrt{1 - U^2}}\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\arctan u = \frac{1}{1 + u^2}\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}log_a u = \frac{d(log_a u)}{dx} = \frac{log_a e}{u}\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\text{arccot}\, u = \frac{d(\text{arccot}\, u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\text{arcsec}\, u = \frac{d(\text{arcsec}\, u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\ \frac{du}{dx}$	
$\frac{d}{dx}\text{arccsc}\, u = \frac{d(\text{arccsc}\, u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\ \frac{du}{dx}$	

Anexo 7. Línea de tiempo

1- ¿Qué es una línea de tiempo?

La línea de tiempo permite ordenar una secuencia de eventos o de hitos sobre un tema, de tal forma que se visualice con claridad la relación temporal entre ellos.

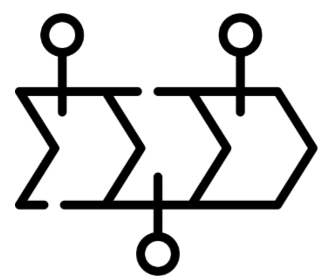
Para elaborar una Línea de Tiempo sobre un tema particular, se deben identificar los eventos y las fechas (iniciales y finales) en que estos ocurrieron; ubicar los eventos en orden cronológico; seleccionar los hitos más relevantes del tema estudiado para poder establecer los intervalos de tiempo más adecuados; agrupar los eventos similares; determinar la escala de visualización que se va a usar y, por último, organizar los eventos en forma de diagrama.

¿Cuáles son los pasos para elaborar una línea de tiempo comparativa?

1. Identifica los hechos históricos y lugares que te interesa conocer y analizar en forma comparativa.
2. Selecciona los datos y fechas más relevantes a partir de una cronología acerca de esos acontecimientos.
3. Elabora la línea de tiempo y organiza la secuencia de manera ordenada, respetando la proporción matemática en la representación gráfica. Por ejemplo, 1 cm equivale a 1 año.
4. Coloca las fechas y, luego, los datos en forma muy breve, pero a la vez suficiente para comprenderlos.
5. También puedes agregar imágenes para complementar y presentar los resultados en forma didáctica.
6.

¿Cómo hacer una línea de tiempo?

A continuación, se indica cómo hacer una línea de tiempo en casa en formato papel. Es importante recordar que es posible realizar uno en formato digital, por medio de herramientas TIC.



El eje, línea o friso cronológico es un gráfico con el que representamos periodos históricos y sucesos. Tiene cuatro partes: el **eje** sobre el que se marcan los datos (que puede ser una línea o una barra rectangular), los **años** que se señalan para indicar la escala, los **periodos** históricos y los **acontecimientos** indicados con líneas.

GUIÓN DE LA ACTIVIDAD:

1. Usa una hoja A4 y colócala en horizontal.

2. Haz una propuesta de escala de tiempo. Para ello empieza colocando la primera fecha (en borrador/lápiz) y a continuación asigna un valor en años a cada cuadro. Por ejemplo, si abarca un periodo de varios milenios cada cuadro tendría que ser equivalente a 100 años, si abarca varios siglos, cada cuadro tendría que valer 10 o 5 años, si abarca un periodo más corto cada cuadro podría valer 1 o 2 años. Recuerda que para siglos y milenios se usa la numeración romana.

3. Prueba la escala hasta encontrar la correcta. Para ello primero asigna un valor y empieza a contar los cuadros que vas a necesitar desde la primera fecha hasta la última. Si falta espacio en la hoja debes reducir la escala, si sobra demasiado debes aumentarla.

4. Dibuja la barra. Una vez que sabes cuál es la escala correcta puedes dibujar una barra que ocupe todo el espacio que va desde la fecha de inicio a la fecha final. La ponemos en una posición más o menos centrada de la hoja teniendo en cuenta los cuadros que no vamos a usar. La barra conviene que tenga un grosor de 10 cuadros si es milimetrada, 5 cuadros si son medianos, o 3 si son grandes.

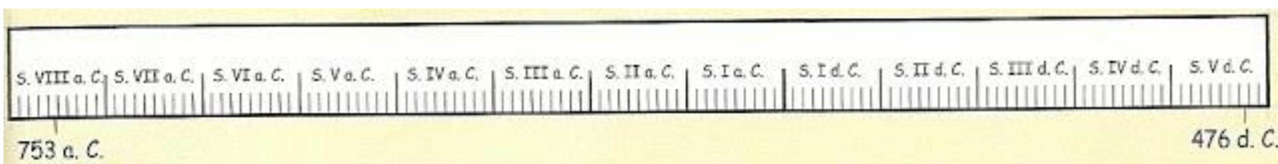


Figura 32 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

Cuando te encuentres con un periodo demasiado extenso puedes cortar la barra en diagonal (imagen inferior) y de esta forma damos a entender que esa barra tendría que ser más larga.

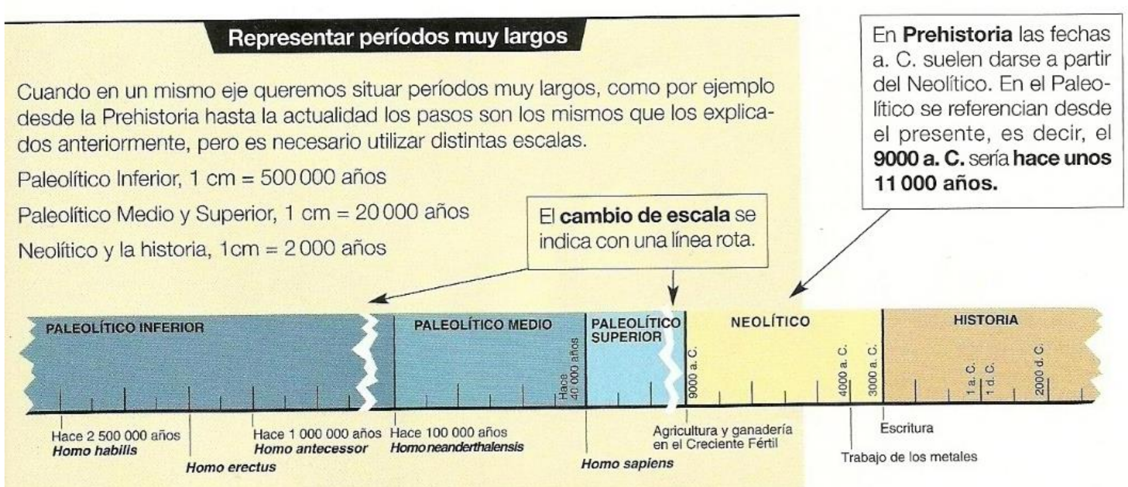


Figura 33 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

Cuando te encuentres con un periodo sin espacio para poner la información puedes hacer una otra barra **aparte** que represente únicamente ese periodo con otra escala y enlazar las dos barras con dos líneas que unan sus puntos de inicio y final (imagen inferior)

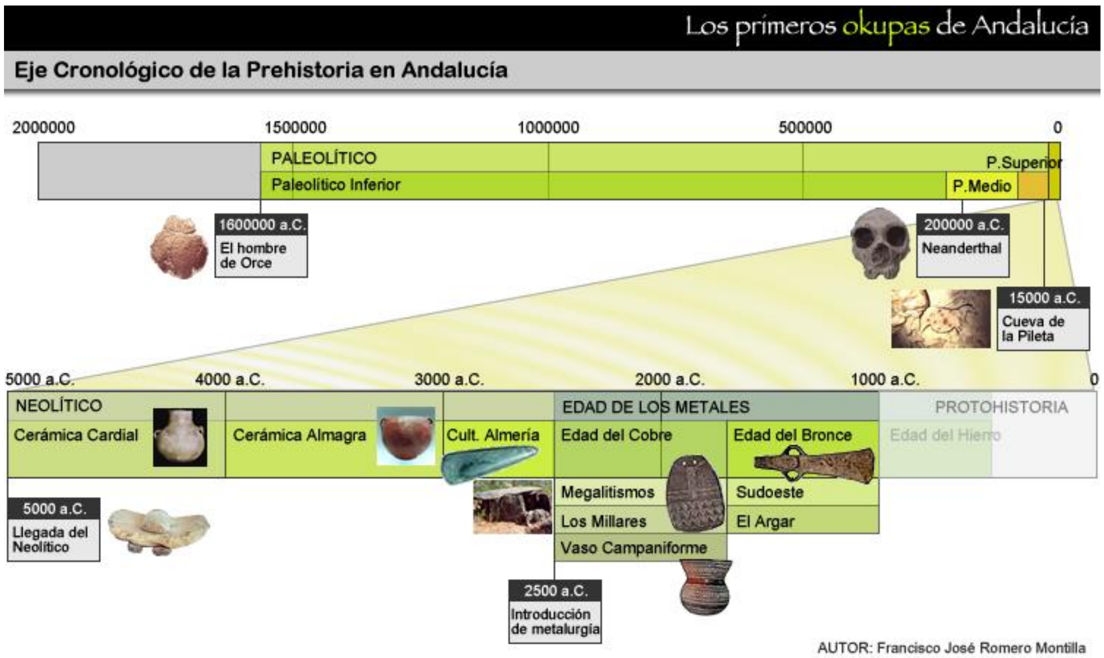


Figura 34 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

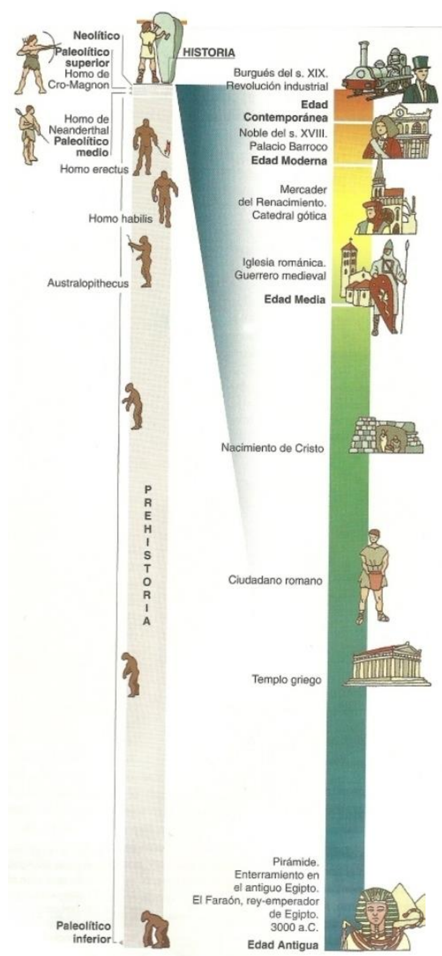


Figura 35 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

5. Señala las fechas clave que dividen los periodos que nos han dado. Ponemos los nombres de los periodos en el interior de la barra si hay sitio (imagen superior) o en una zona próxima (imagen inferior).

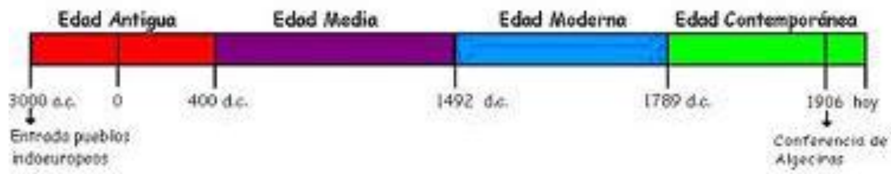


Figura 36 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

Para señalar los periodos también podemos usar corchetes (imagen inferior).

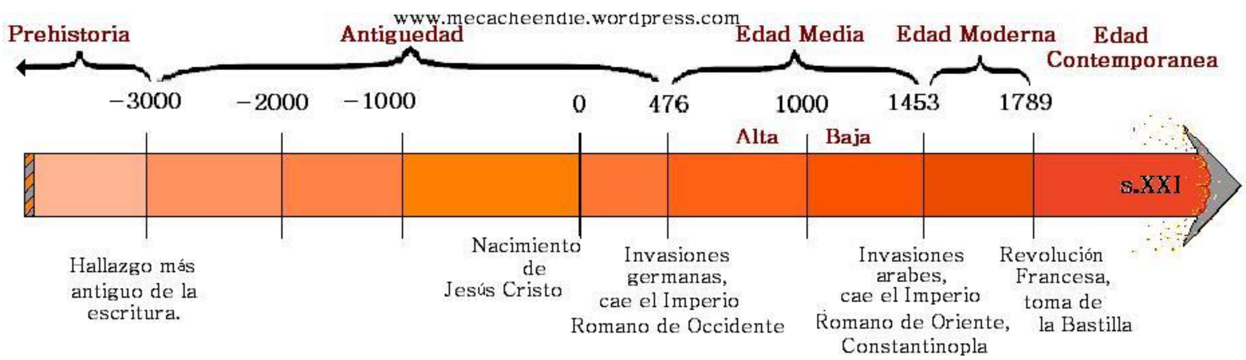


Figura 37 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

Si la información no cabe en horizontal puede ponerse en vertical (imagen inferior).

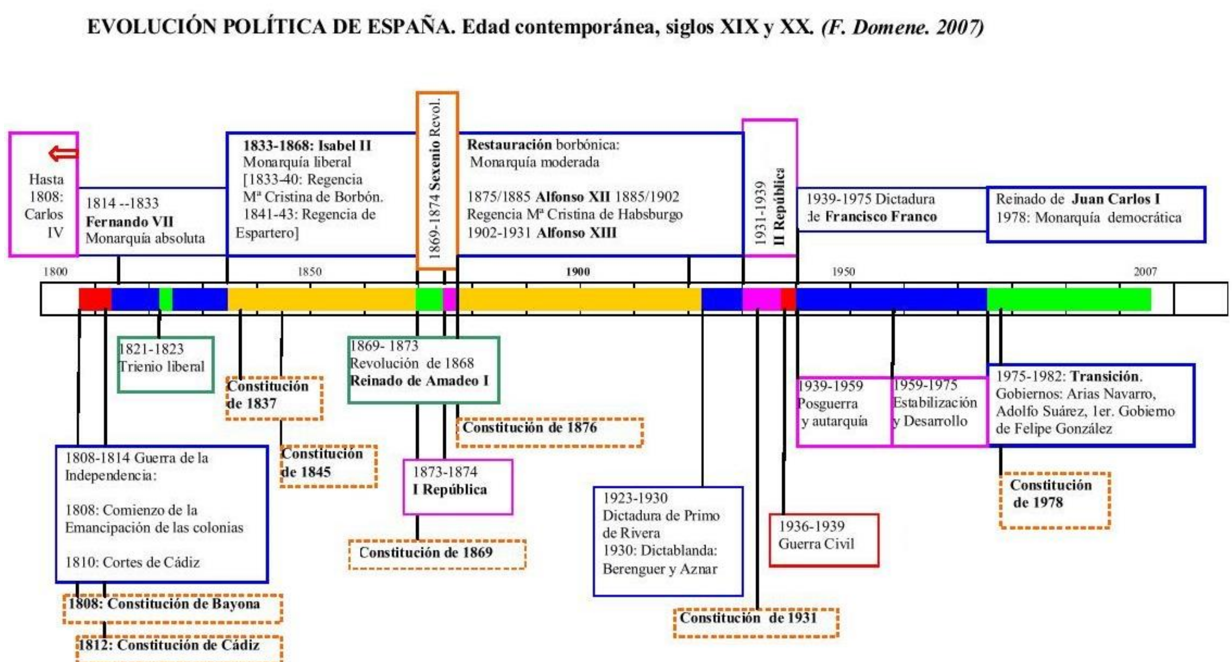


Figura 38 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

6. Localiza otras fechas de los acontecimientos en la barra y desde esas fechas alarga una línea hacia arriba o hacia abajo hasta llegar a un hueco donde escribir la fecha y el acontecimiento (imagen inferior).

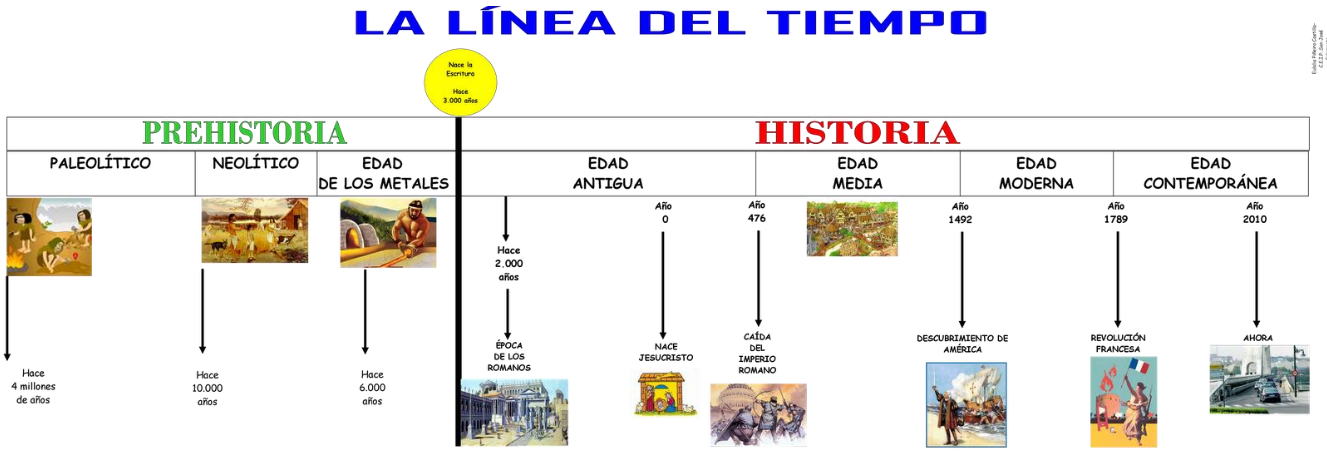


Figura 39 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

El resultado final **se puede colorear y decorar** con iconos (imagen inferior)

Figura 40 tomada de internet: https://www.profesorfrancisco.es/2013/07/como-hacer-una-linea-del-tiempo.html

MATERIAL SUGERIDO PARA CONSULTA

Campos, F. O. (2006). *Cálculo Diferencial.* México: Publicaciones Cultural.

Carrasco, P. I. (2007). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* México: Cengage.

Edupler. (03 de mayo de 2017). *Derivada por Definición - Ej.3 (Raíz Cuadrada).* [vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=EJYfnj3NMlo

Glaros, D. (2008). *Cálculo diferencial.* México: Limusa.

Matemáticas profe Alex. (13 de marzo de 2018). *Derivada de una función usando la definición | Ejemplo 1.* [Archivo de vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=U7onW7mMzLM

MateFacil. (24 de septiembre de 2015). *¿Qué es la derivada? (Explicación gráfica e histórica).* [vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc

Matemáticas en la Debeteca. (21 de febrero del 2020). *Derivada del seno coseno y tangente + regla de la cadena*. [Archivo de vídeo]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=HcvK3iEy0HA

Ríos, N. G. (2017). *Cálculo diferencial.* México: Umbral.

Tejeda, L. C. (2012). *Cálculo Diferencial.* México: Nueva Imagen, S.A. de C.V.

Tejeda, L. C. (2019). *Cálculo Diferencial.* México: Nueva Imagen.

Villarreal, A. R. (2016). *Cálculo Diferencial.* México: Book Mart.

BIBLIOGRAFÍA

Callejas Tejeda Luciano. (2019). *Cap. 3 Aplicaciones de la derivada* (pp. 146-160). Ciudad de México: Nueva Imagen, S.A. de C.V.

Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California (2020). *Cálculo diferencial: Guía de actividades del alumno para el desarrollo de competencias.* México: COBACH BC

Earl W. Swokoswky, J. A. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: CENGAGE Learning.

James Stewart, L. R. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. México: CENGAGE Learning.

Jerome E. Kaufmann, K. L. (2013). *Álgebra.* México: CENGAGE Learning.

Kong Maynard (2001). *Cálculo Diferencial.* [en línea] Perú: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/77.

MATEMÁTICAS, C. N. (2009). *Matemáticas Simplificadas.* México: PEARSON EDUCATION.

Purcel, E. Varberg, D. Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9ª ed). México: Pearson Educación

Khan Academy (s.f.). *Optimización: Volumen de una caja*. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-diff-analytical-applications-new/ab-5-11/v/optimizing-box-volume-graphically

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría*. México: Pearson education

Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios (UEMSTIS) (2020). *Cálculo diferencial: curso final del período escolar 2020*. México: Secretaría de Educación Pública